1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$\boxed{1}$ Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 1$).
On considère l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / AM = MA\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel.

$\boxed{2}$ Déterminer une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée uniquement de matrices inversibles.

$\boxed{3}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AM$. Montrer que f est linéaire, déterminer son image, son noyau, son rang, et la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 Les fonctions polynomiales et l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on notera abusivement x^k la fonction polynomiale $x \mapsto x^k$.

$\boxed{4}$ Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ P(0) = 0\}$
2. $G = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ P(1) = P'(1) = 0\}$.
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$
4. $I = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + (b-2a)x + a - b + c,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{5}$

1. La famille $(x, x+1, x^2-1)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}_2[x]$?
2. La famille $(3x^2+x+2, 3x^2+x+1, 2x^2+x+1)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[x]$?
3. La famille $(x^3, x^2(x-2), x(x-2)^2, (x-2)^3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[x]$?
4. Montrer que la famille $(x^2+x+1, 2x^2+3x+4, -x^2+x+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
5. Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Montrer que la famille $(P, P', P'', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

$\boxed{6}$ Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_4[x] \ / \ P(0) = 0\}$ et $G = Vect(x^2+1)$. Montrer que $\mathbb{R}_4[x] = F \oplus G$.

$\boxed{7}$ Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$.
Soit $F = Vect(P_1, P_2, P_3)$ avec : $P_1 = 2x^2 - x + 1,\ P_2 = x^3 + x^2 + 1,\ P_3 = x^3 - x^2 + x$.
Soit $G = \{P \in E \ / \ P(1) = 0\}$.
Déterminer une base et la dimension de F, G, $F+G$, $F \cap G$.

$\boxed{8}$ Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur noyau, leur image, leur rang et leur matrice canonique associée.

1. $f : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x],\ P \mapsto P'$
2. $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x],\ P \mapsto P'$
3. $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3,\ P \mapsto (P(0), P(1), P'(1))$.
4. $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x],\ P \mapsto \Big(x \mapsto P(x) + (x-2).P'(x)\Big)$

3 Matrice d'une application linéaire dans des bases

$\boxed{9}$ Soit $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

1. Soit $u = (1, 2, -1)$. Montrer que (u) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Soient $v = (1, 0, -1)$ et $w = (1, -1, 0)$. Calculer $f(v)$ et $f(w)$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner $mat_{\mathcal{B}'}(f)$
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(Id - f)$.

$\boxed{10}$ On pose pour tout $P \in \mathbb{R}_3[x]$, $f(P) = P(x+1)$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[x])$ et déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

$\boxed{11}$ Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une de ses bases. On définit l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^4$ par $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \varphi(e_i) = e_{i+1}$ et $\varphi(e_4) = e_1$.

1. Montrer que φ est un automorphisme et donner $mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$.
2. Déterminer φ^{-1} et en déduire la valeur de A^{-1}.

4 Restriction d'applications linéaires

$\boxed{12}$ Soit E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit g la restriction de f à $\mathrm{Ker}(f^2)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$ et que $rg(g) \leqslant rg(f)$.
3. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

$\boxed{13}$ Soit A la matrice d'ordre 4 qui comporte des 1 sur sa diagonale, sur sa première colonne, sur sa dernière colonne, et des 0 partout ailleurs.

1. La matrice A est-elle inversible ? Préciser son rang et une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Im}(A)$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A, et soit g la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$. Vérifier que g est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$. Préciser sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. L'endomorphisme g est-il bijectif ?

$\boxed{14}$ Soit A la matrice d'ordre 4 qui comporte des 1 sur sa première colonne, sur sa dernière colonne, sur sa dernière ligne et des 0 partout ailleurs.

1. La matrice A est-elle inversible ? Préciser son rang et une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Im}(A)$.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A, et soit g la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$. Vérifier que g est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$. Préciser sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. L'endomorphisme g est-il bijectif ?