

1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

1 Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$).

On considère l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.

Montrer que E est un espace vectoriel.

2 Déterminer une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée uniquement de matrices inversibles.

3 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = AM$. Montrer que f est linéaire, déterminer son image, son noyau, son rang, et la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 Les fonctions polynomiales et l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on notera abusivement x^k la fonction polynomiale $x \mapsto x^k$.

4 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] / P(0) = 0\}$
2. $G = \{P \in \mathbb{R}_3[x] / P(1) = P'(1) = 0\}$.
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[x] / P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$
4. $I = \{P \in \mathbb{R}_2[x] / \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + (b - 2a)x + a - b + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$

5

1. La famille $(x, x + 1, x^2 - 1)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}_2[x]$?
2. La famille $(3x^2 + x + 2, 3x^2 + x + 1, 2x^2 + x + 1)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[x]$?
3. La famille $(x^3, x^2(x - 2), x(x - 2)^2, (x - 2)^3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[x]$?
4. Montrer que la famille $(x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x + 4, -x^2 + x + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
5. Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Montrer que la famille $(P, P', P'', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

6 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_4[x] / P(0) = 0\}$ et $G = Vect(x^2 + 1)$. Montrer que $\mathbb{R}_4[x] = F \oplus G$.

7 Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$.

Soit $F = Vect(P_1, P_2, P_3)$ avec : $P_1 = 2x^2 - x + 1$, $P_2 = x^3 + x^2 + 1$, $P_3 = x^3 - x^2 + x$.

Soit $G = \{P \in E / P(1) = 0\}$.

Déterminer une base et la dimension de F , G , $F + G$, $F \cap G$.

8 Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur noyau, leur image, leur rang et leur matrice canonique associée.

1. $f : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x], P \mapsto P'$
2. $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], P \mapsto P'$
3. $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3, P \mapsto (P(0), P(1), P'(1))$.
4. $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x], P \mapsto \left(x \mapsto P(x) + (x - 2) \cdot P'(x) \right)$

3 Matrice d'une application linéaire dans des bases

9 Soit $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à M .

1. Soit $u = (1, 2, -1)$. Montrer que (u) est une base de $\text{Ker}(f)$.
2. Soient $v = (1, 0, -1)$ et $w = (1, -1, 0)$. Calculer $f(v)$ et $f(w)$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 et donner $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
4. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(Id - f)$.

10 On pose pour tout $P \in \mathbb{R}_3[x]$, $f(P) = P(x + 1)$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[x])$ et déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

11 Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une de ses bases. On définit l'endomorphisme φ de \mathbb{R}^4 par $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \varphi(e_i) = e_{i+1}$ et $\varphi(e_4) = e_1$.

1. Montrer que φ est un automorphisme et donner $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$.
2. Déterminer φ^{-1} et en déduire la valeur de A^{-1} .

4 Restriction d'applications linéaires

12 Soit E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit g la restriction de f à $\text{Ker}(f^2)$.

1. Montrer que $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$
2. Montrer que $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$ et que $\text{rg}(g) \leq \text{rg}(f)$.
3. Montrer que $\dim(\text{Ker}(f^2)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(f))$.

13 Soit A la matrice d'ordre 4 qui comporte des 1 sur sa diagonale, sur sa première colonne, sur sa dernière colonne, et des 0 partout ailleurs.

1. La matrice A est-elle inversible? Préciser son rang et une base \mathcal{B} de $\text{Im}(A)$.
2. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 canoniquement associé à A , et soit g la restriction de f à $\text{Im}(f)$. Vérifier que g est un endomorphisme de $\text{Im}(f)$. Préciser sa matrice dans la base \mathcal{B} . L'endomorphisme g est-il bijectif?

14 Soit A la matrice d'ordre 4 qui comporte des 1 sur sa première colonne, sur sa dernière colonne, sur sa dernière ligne et des 0 partout ailleurs.

1. La matrice A est-elle inversible? Préciser son rang et une base \mathcal{B} de $\text{Im}(A)$.
2. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 canoniquement associé à A , et soit g la restriction de f à $\text{Im}(f)$. Vérifier que g est un endomorphisme de $\text{Im}(f)$. Préciser sa matrice dans la base \mathcal{B} . L'endomorphisme g est-il bijectif?