11.1

1. Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(-6,-17,17)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $((2,1,3),(3,5,-2))$?
2. Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?
3. Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^3 + X^2 - 2X$ est-il une combinaison linéaire des polynômes $X^2(X-1)$ et $X(X-1)^2$?

11.2 Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 1)$.
On considère l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \; / AM = MA\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel.

11.3 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & a-b \\ 3b & 2a \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F = \{(x+y, x-y, 2y), \; x, y \in \mathbb{R}\}$
3. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; x + 2y - 3z = 0\}$
4. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
5. $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \; / \; -x + 2y = y + 6z \text{ et } y + 3z = -2x \right\}$
6. $J = \{(u_n) \; / \; \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n\}$

11.4 Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1,6,9),(1,4,6),(3,6,2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

11.5 Pour les espaces vectoriels suivants, déterminer une famille génératrice :

1. $A = \{(x-y, x+y, 2x-3y), \; x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; x = y = z\}$
3. $C = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \; / \; 2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$
4. $D = \{P \in \mathbb{C}_3[X] \; / \; P(0) = P'(0) = 0\}$
5. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix}, \; x, y \in \mathbb{R} \right\}$

11.6 Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $((1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,2,8,16))$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $(X^3, X^2(X-2), X(X-2)^2, (X-2)^3)$ dans $\mathbb{R}[X]$
3. $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
4. $((x \mapsto x), (x \mapsto e^x), (x \mapsto \ln(x))$ dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5. $(\cos, \sin)$ dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

11.7 Montrer que si $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ est une famille libre dans un espace vectoriel E, il en est de même pour la famille $(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_3} + \overrightarrow{x_1})$.

11.8 Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

1. $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x+y+z & y \\ z & y & x \end{pmatrix}, \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$
2. $B = \{P \in \mathbb{R}[X] \; / \; P = aX^2 + (b-2a)X + a - b + c, \; a, b, c \in \mathbb{R}\}$
3. $C = \{(x-y+z, 3x+6z, -2x+4y), \; x, y, z \in \mathbb{R}^3\}$
4. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; 2x = y \text{ et } y = 3z\}$

11.9 Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
4. $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$
5. $E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - 3z = 4y - 5x\}$
6. $E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x + 2y = y + 6z = 3z - 2x\}$

11.10 Déterminer si la famille donnée est une base de l'espace donné :

1. $((1,0,-2,5),(7,-4,3,1),(0,1,-1,0),(1,-3,0,2))$ dans $\mathbb{R}^4$
2. $((1,2,3),(4,5,6))$ dans $\mathbb{R}^3$
3. $(3X^2 + X + 2, 3X^2 + X + 1, 2X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$
4. $\left(\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

11.11 Dans $E = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, on définit une loi $+$ par

$$(x,y) + (x',y') = (xx', y + y')$$

et une loi externe à coefficients dans $\mathbb{R}$ par

$$\lambda(x,y) = (x^\lambda, \lambda y)$$

Vérifier que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

11.12 Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$.
Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + z = 0\}$.
Vérifier la formule de Grassman.

11.13 Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$.
Soit $G = Vect((1,1,1))$.
Montrer que F est G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

11.14 Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$.
Soit $G = Vect((1,1,1))$.
Montrer que F est G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

11.15 Soit $E = \mathbb{R}^3$.

1. Soit $F = Vect((0,1,1),(1,0,2))$. Trouver un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $F \oplus Vect(\overrightarrow{x}) = E$.
2. Même question avec $F = Vect((1,2,3),(2,2,0))$.

11.16 Soit $E = \mathbb{R}^3$.

1. Soit $F = Vect((1,2,2))$. Trouver deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $F \oplus Vect(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = E$.
2. Même question avec $F = Vect((1,0,1))$.

11.17 Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

On note F le sev des fonctions paires de E et G le sev des fonctions impaires de E.
Montrer que $E = F \oplus G$.