$\boxed{\textbf{07.1}}$ Montrer que :

1. la composée de deux applications injectives est injective.
2. la composée de deux applications surjectives est surjective.

$\boxed{\textbf{07.2}}$ Soient E, F et G trois ensembles non vides.
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

$\boxed{\textbf{07.3}}$ Soient E et F deux ensembles non vides et soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que f injective $\iff \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(A)) = A$
2. Montrer que f surjective $\iff \forall B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) = B$
3. Montrer que f injective $\iff \forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

$\boxed{\textbf{07.4}}$ Pour chaque application et pour tout y élément de l'ensemble d'arrivée, déterminer le nombre d'antécédent de y :

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 + 3x + 4 \end{array} \right.$
2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1/2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{4x+5}{6x-3} \end{array} \right.$
3. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1+x}{1-x} \end{array} \right.$

$\boxed{\textbf{07.5}}$ On considère les deux fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

1. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.
2. Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

$\boxed{\textbf{07.6}}$ Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe au moins un réel x_0 dans $[0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

$\boxed{\textbf{07.7}}$ Soit P un polynôme de degré n avec n un entier impair.
Montrer que P admet au moins une racine réelle.

$\boxed{\textbf{07.8}}$ Soit f une fonction décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique réel x_0 qui vérifie $f(x_0) = x_0$.

$\boxed{\textbf{07.9}}$ Montrer que l'équation

$$x^2 e^x = 1$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on note α.
Vérifier qu'on a $\alpha \in [0,1]$.

$\boxed{\textbf{07.10}}$ Montrer que l'équation

$$\ln(x) = -x$$

admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{\textbf{07.11}}$ Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$.
Montrer que f réalise une bijection de $[\sqrt{e}, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.