**01.1**

1. Montrer que $(u_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + 2$ est une suite croissante.
2. Montrer que $(u_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -(n+2)(n-10)$ est une suite strictement décroissante à partir du rang 6.
3. Etudier la monotonie des suites suivantes :
$$u_n = \frac{n!}{2^n}, \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right) - n\sqrt{n}, \qquad w_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}.$$

**01.2** Vérifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

En déduire une expression simple de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)}$.

**01.3**

1. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\dfrac{n-2}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-2}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{3n}{n+1}$

**01.4** Démontrer par récurrence les résultats suivants :

1. $\forall n \geqslant 1,\ 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n+1$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (a-b)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} b^{n-k}\right) = a^n - b^n$

**01.5** Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

1. Calculer les 7 premiers termes de la suite
2. Conjecturer une expression de $u_n$ en fonction de $n$.
3. Démontrer cette conjecture par un raisonnement par récurrence.

**01.6** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{n}{2^n}$

1. Montrer que pour tout entier $n$, $u_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$
2. La suite $(u_n)$ est-elle majorée ?
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $n + 2 \leqslant 2^n$.
4. La suite $(u_n)$ est-elle minorée ?

**01.7** Soit $(u_n)$ la suite définie par ces deux premiers termes $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n + 3^n$.

**01.8** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2$.
Déterminer une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**01.9** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n+3} \frac{2^{k+1}}{3^k}, \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} 3^{-k},$$
$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} 4.5^{2k}, \qquad S_5 = 3 + 6 + 12 + \cdots + 972,$$
$$S_6 = 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots + \frac{2^{10}}{3^9}, \qquad S_7 = 2 - \frac{4}{3} + \frac{8}{9} - \cdots + \frac{2^{10}}{3^9}$$
$$S_8 = \sum_{k=1}^{n} k(k^2-2), \qquad S_9 = \sum_{k=2}^{25} (k+1)(k+2), \qquad S_{10} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$