Les calculs

00.1 Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$:

$$\ln(6), \qquad \ln(4^3), \qquad \ln(\sqrt{2})$$

00.2 Simplifier au maximum les expressions suivantes, sans se soucier du problème de leur définition :

$$\frac{e^{x^2}}{e^{2x}}, \qquad e^{x^2+1} - (e^x)^2, \qquad \frac{\ln(2x)}{\ln(x)}, \qquad e^{-\ln(5)}$$

00.3 Simplifier les expressions suivantes, sans se soucier du problème de leur définition :

1. $2 - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{x}}}$
2. $\dfrac{a^{-4}b^3a^3}{(ab^2)^{-2}}$
3. $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$
4. $\sqrt{4a^2(a-b)(a+b)+b^4}$
5. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ (pour $x \geqslant 1$)

00.4 Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $x^2 - 6x + 3 = 0$
2. $3x(1-x) = (1-2x)(x-2)$
3. $\sqrt{x+4} = 4x+2$
4. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 1$
5. $-9x^2 + 24x - 16 < 0$
6. $(x-2)(1-x) > x(5-x)$
7. $\sqrt{x-2} > x-5$
8. $\sqrt{2x-5} - \sqrt{x-3} > 1$

Les fonctions usuelles

00.5 Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, la dérivée, et enfin l'allure du graphe pour les fonctions suivantes :

1. Fonction $x \mapsto x^2$
2. Fonction $x \mapsto x^3$
3. Fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
4. Fonction $x \mapsto \sqrt{x}$
5. Fonction $x \mapsto \ln(x)$
6. Fonction $x \mapsto \exp(x)$

00.6 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$
2. $g(x) = \exp\left(x^2+x\right)$
3. $h(x) = x^{x^2}$
4. $u(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Suites et récurrences

00.7

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -3 telle que $u_0 = 2$. Calculer u_{10} et u_{20}.
2. Soit (v_n) une suite arithmétique. On sait seulement que $v_5 = 17$ et $v_{10} = 12$. Calculer v_0 et v_1.
3. Soit (w_n) une suite géométrique de raison $r = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = 32$. Calculer w_1, w_2, w_3.
4. Soit (x_n) une suite géométrique telle que $x_0 = 3$ et $x_2 = 12$. Calculer x_1 et x_5.

$\boxed{\textbf{00.8}}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$.
   Déterminer une formule simple pour u_n pour tout $n \geqslant 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n$.
   Déterminer une formule simple pour v_n pour tout $n \geqslant 0$.

$\boxed{\textbf{00.9}}$ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n + 6$$

1. Déterminer une solution ℓ de l'équation $x = 5x + 6$.
2. On pose (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \ell$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison.
3. En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n

$\boxed{\textbf{00.10}}$ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n + 2$.
En vous inspirant de l'exercice précédent, déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ une expression de u_n en fonction de n.

$\boxed{\textbf{00.11}}$ On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{u_n + 4}$.

1. Montrer que pour tout enier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

$\boxed{\textbf{00.12}}$ On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2. En considérant $u_{n+1}^2 - u_n^2$, montrer que (u_n) est croissante.

Matrices (pour les ES)

$\boxed{\textbf{00.13}}$ Soient A et B les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer AB et BA.

$\boxed{\textbf{00.14}}$ Soient A et B les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = aI + B$
2. Calculer B et B^2.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = a^n I + na^{n-1}B + \frac{n(n-1)a^{n-2}}{2}B^2$$

$\boxed{\textbf{00.15}}$ Soit A une matrice de taille 3 telle que $A^3 - 5A^2 + 7A - 3I = 0$.
Montrer que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction des matrices A^2, A et I.

$\boxed{\textbf{00.16}}$ Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x - y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x + y + 2z &= 3 \end{cases}$$

Dénombrement (pour les S)

00.17 Un parlement est constitué de 470 parlementaires. Ils doivent élire une commission de cinq membres. Chaque parlementaire doit voter pour cinq candidats. On suppose qu'il n'y a ni vote nul ni abstention. On considère les trois candidats A, B, C.

- 282 parlementaires ont voté pour A
- 117 ont voté pour A et B
- 105 ont voté pour A et C
- 79 ont voté pour pour A, B et C
- 117 ont voté pour B et C mais pas pour A
- 27 ont voté pour C mais pas pour A ni pour B
- 133 ont voté pour B mais pas pour A.

1. Combien de parlementaires ont voté pour B ?
2. Combien de parlementaires ont voté pour C ?
3. Combien de parlementaires n'ont voté ni pour A, ni pour B, ni pour C ?

00.18 Combien y a-t-il d'anagrammes des mots suivants :

MATHS, REVISIONS, DENOMBREMENT ?

00.19 On considère un jeu de 32 cartes. On appelle main toute poignée de 8 cartes extraites de ce jeu.

1. Combien existe-t-il de mains différentes ?
2. Déterminer le nombre de mains différentes contenant :
   (a) exactement deux As et au moins trois Rois
   (b) au moins un As
   (c) au plus trois As
   (d) au moins un Roi et au plus trois Dames
   (e) exactement deux As et exactement deux rois

Nombres complexes (pour les S)

00.20 Déterminer (sous forme algébrique) le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (5+2i)^3$
2. $z_2 = \dfrac{1-2i}{4-3i}$
3. $z_3 = \dfrac{(1-i)(2+i)}{5-2i}$
4. $z_4 = e^{i\pi/4} - i$

00.21 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 5$
2. $z_2 = -36$
3. $z_3 = -3i$
4. $z_4 = \sqrt{3}i$
5. $z_5 = 5-5i$
6. $z_6 = 2i - 2\sqrt{3}$
7. $z_7 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}i - 1}$
8. $z_8 = \left(\dfrac{1-3i}{i-2}\right)^{11}$

00.22 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(3i-7)z + 1 = i(3-z)$
2. $z^2 = -7$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $z^2 = -3-4i$

(Pour la dernière, poser $z = x+iy$ et déterminer des relations vérifiées par x et y).