03.1

$$E = \{1, 2\}$$

Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

03.2

$$E = \Big\{\{1, 2\}\Big\}$$

Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

03.3 Démontrer que pour tous réels x et y, on a :

$$\max(x, y) = \frac{(x+y) + |x-y|}{2}$$

et

$$\min(x, y) = \frac{(x+y) - |x-y|}{2}$$

03.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|2x+1| + |1-x| \leqslant 3$$

03.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right| < 2$$

03.6 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Ent}(x+1) = \mathrm{Ent}(x) + 1$$

03.7 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

On note $q = \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{b-a}\right) + 1$ et $p = \mathrm{Ent}(aq) + 1$. Démontrer que :

$$a < \frac{p}{q} < b$$

Qu'a-t-on démontré ?

03.8 Montrer que pour tous réels x et y positifs, on a :

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

03.9 Montrer que pour tous réels x et y, on a :

$$|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

03.10 Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in [a, b],\ (a-x)(x-b) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

2. Soient x, y deux réels de $[a, b]$. En raisonnant par l'absurde, montrer que :

$$\min\Big((x-a)(b-y), (y-a)(b-x)\Big) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$