06.1 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, préciser leur domaine de dérivabilité et calculer leur dérivée là où elle existe :

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{2x^2+3x+1}$
2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+3}{x^2-5}}$
3. $f_3 : x \mapsto \ln(\ln(|x|))$
4. $f_4 : x \mapsto (x^2-4x+3)^4$
5. $f_5 : x \mapsto x^2\sqrt{1-2x}$
6. $f_6 : x \mapsto \ln^3(x)$
7. $f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$
8. $f_8 : x \mapsto (\sqrt{x}+1)^2$
9. $f_9 : x \mapsto \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$
10. $f_{10} : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$
11. $f_{11} : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
12. $f_{12} : x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)}$

06.2 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe au moins un réel x_0 dans $[0,1]$ tel que $f(x_0)=x_0$.

06.3 Soit f une fonction polynômiale de degré n avec n un entier impair.
Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

06.4 Soit f une fonction décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique réel x_0 qui vérifie $f(x_0)=x_0$.

06.5 Montrer que l'équation $x^2e^x=1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on note α. Vérifier qu'on a $\alpha\in[0,1]$.

06.6 Montrer que l'équation $\ln(x)=-x$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$.

06.7 Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$. Montrer que f réalise une bijection de $[\sqrt{e},+\infty[$ sur un intervalle à préciser.

06.8 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que si f est paire, alors sa dérivée est impaire.
Montrer que si f est impaire, alors sa dérivée est paire.

06.9 Pour tout entier $n\geqslant 1$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ f_n(x)=x^n+9x^2-4$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution strictement positive notée u_n.
2. Calculer u_1 et u_2. Vérifier que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0<u_n<\dfrac{2}{3}$.
3. Montrer que : $\forall x\in]0,1[,\ f_{n+1}(x)<f_n(x)$
4. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$.
5. Déterminer enfin les variations de la suite (u_n).

06.10 Soit pour tout entier $n\geqslant 1$, f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall x>0,\ f_n(x)=nx+\ln(x)$.

1. Pour tout entier $n\geqslant 1$, montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$, qui appartient à $]0,1]$. On notera x_n cette solution.
2. Montrer que (x_n) est décroissante.
3. Montrer que pour $n\geqslant 3$, $x_n>\dfrac{1}{n}$.
4. Etudier le signe de $x-\ln(x)$ et en déduire que $x_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

06.11 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

06.12 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2 + 3\ln(x)}{1 - \ln(x)}$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Déterminer $f^{-1}(-4)$. Justifier que f^{-1} est dérivable en -4 et calculer $(f^{-1})'(-4)$.

06.13 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

06.14 Déterminer la dérivée n-ième de

$$f : x \mapsto e^{-x}(3x^2 + x - 5)$$

06.15 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f'(a) = 0$, que $f(b) > 0$ et que $f'(b) < 0$.
Montrer que f' s'annule sur $]a, b[$.

06.16 Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

06.17 Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\frac{1}{x+y} \leqslant \frac{1}{y} \ln\left(\frac{x+y}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$$

06.18 Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
2. Démontrer que h admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$
3. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$,
$$|h(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

06.19 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.
Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que la proposition $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n \geqslant 0$" est vraie.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   On note α la solution positive. Montrer que $\alpha \leqslant 1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.