

**03.1**

$$E = \{1, 2\}$$

Déterminer  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ .**03.2**

$$E = \left\{ \{1, 2\} \right\}$$

Déterminer  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ .**03.3** Soit  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Simplifier l'expression suivante :

$$(A \cap {}^c B) \cup (A \cap B)$$

**03.4** Démontrer que pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :

$$\max(x, y) = \frac{(x + y) + |x - y|}{2}$$

et

$$\min(x, y) = \frac{(x + y) - |x - y|}{2}$$

**03.5**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation

$$|2x + 1| + |1 - x| \leq 3$$

**03.6** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{Ent}(x + 1) = \text{Ent}(x) + 1$$

**03.7** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ .On note  $q = \text{Ent}\left(\frac{1}{b-a}\right) + 1$  et  $p = \text{Ent}(aq) + 1$ . Démontrer que :

$$a < \frac{p}{q} < b$$

Qu'a-t-on démontré ?

**03.8** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq \text{Ent}(2x) - 2 \text{Ent}(x) \leq 1$$

**03.9** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq \text{Ent}(x) + \text{Ent}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \text{Ent}(2x)$$

**03.10** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

1. Montrer que :

$$\forall x \in [a, b], (a - x)(x - b) \leq \frac{(b - a)^2}{4}$$

2. Soient  $x, y$  deux réels de  $[a, b]$ . En raisonnant par l'absurde, montrer que :

$$\min\left((x - a)(b - y), (y - a)(b - x)\right) \leq \frac{(b - a)^2}{4}$$