01.1 Traduire mathématiquement les phrases suivantes :

1. Il existe un réel strictement supérieur à son carré.
2. Il existe un entier compris entre $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.
3. n est un entier pair.
4. n est un entier impair.
5. n est un multiple de 3.

01.2 Donner la négation des phrases suivantes :

1. Paul est un garçon et vit à Lyon.
2. Il pleut ou il vente.
3. A l'équation (E), il existe une unique solution
4. S'il pleut, je prends mon parapluie
5. Si x est solution de l'équation (E), alors $x \in \mathbb{N}$
6. Pour tout élève de prépa, les maths sont un cauchemar.
7. Il existe un prof de maths qui ne fait pas de fautes d'orthographe.

01.3 Entre les propriétés (a) et (b), mettre le bon signe entre "⇒", "⇐" ou "⇔".

(a) n est multiple de 3	(b) n est multiple de 6
(a) $\sqrt{x+2} \geqslant -1$	(b) $x+2 \geqslant 1$
(a) $\sqrt{x+2} \geqslant 2$	(b) $x+2 \geqslant 4$
(a) $x-3 = x^2+2x$	(b) $e^{x-3} = e^{x^2}e^{2x}$
(a) $\ln(x) = 0$	(b) $x = 1$

01.4

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \big[(\forall \varepsilon > 0,\ -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon) \Longrightarrow x = 0\big]$.
2. On considère les propositions :

   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \big[(\forall y \in \mathbb{R}, xy = 0) \Longrightarrow x = 0\big]$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \big[xy = 0 \Longrightarrow x = 0\big]$

   Sont-elles vraies ou fausses ?

01.5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$.
2. $\sqrt{4x^2+1} = 2x-1$
3. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$
4. $\sqrt{x-2} \geqslant 4-x$

01.6 Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n dans les cas suivants :

1. $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$
3. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2^n$

01.7 Démontrer par récurrence les résultats suivants :

1. $\forall n \geqslant 1,\ 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n+1$

01.8 Soit (u_n) la suite définie par ces deux premiers termes $u_0 = 4$ et $u_1 = 8$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$.

01.9 Soit (u_n) la suite définie par ces deux premiers termes $u_0 = 4$ et $u_1 = 8$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$.

01.10 Soit (u_n) la suite définie par ces deux premiers termes $u_0 = 4$ et $u_1 = \dfrac{7}{3}$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{7}{6}u_{n+1} - \dfrac{1}{3}u_n$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$.

01.11 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 4$.

Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

01.12 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 3v_n + 4$.

Déterminer une expression de v_n en fonction de n.

01.13 Soit (u_n) définie par $u_0 = -1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3+u_n}$.

On pose également $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Déterminer une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.