07.1 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, préciser leur domaine de dérivabilité et calculer leur dérivée là où elle existe :

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2+3x+1}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+3}{x^2-5}}$
3. $h : x \mapsto \ln(\ln(|x|))$
4. $u : x \mapsto \ln^3(x)$
5. $v : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$
6. $w : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
7. $z : x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)}$

07.2 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe au moins un réel x_0 dans $[0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

07.3 Soit f une fonction polynômiale de degré n avec n un entier impair.
Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

07.4 Soit f une fonction décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique réel x_0 qui vérifie $f(x_0) = x_0$.

07.5 Montrer que l'équation $x^2e^x = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on note α. Vérifier qu'on a $\alpha \in [0,1]$.

07.6 Montrer que l'équation $\ln(x) = -x$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$.

07.7 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$. Montrer que f réalise une bijection de $[\sqrt{e},+\infty[$ sur un intervalle à préciser.

07.8 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que si f est paire, alors sa dérivée est impaire.
Montrer que si f est impaire, alors sa dérivée est paire.

07.9 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive notée u_n.
2. Calculer u_1 et u_2. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < \dfrac{2}{3}$.
3. Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ f_{n+1}(x) < f_n(x)$
4. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$.
5. Déterminer enfin les variations de la suite (u_n).

07.10 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

07.11 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2+3\ln(x)}{1-\ln(x)}$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]e,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Déterminer $f^{-1}(-4)$. Justifier que f^{-1} est dérivable en -4 et calculer $(f^{-1})'(-4)$.

07.12 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

07.13 Déterminer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto e^{-x}(3x^2+x-5)$.

07.14 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f'(a) = 0$, que $f(b) > 0$ et que $f'(b) < 0$.
Montrer que f' s'annule sur $]a, b[$.

07.15 Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

07.16 Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :
$\dfrac{1}{x+y} \leqslant \dfrac{1}{y} \ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

07.17 Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

1. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
2. Démontrer que h admet un unique point fixe α et que $\alpha \in [0, 1]$
3. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$,
$$|h(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

07.18 Déterminer le développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre n donné :

1. $x \mapsto \ln(1 + x) + e^x$, $n = 4$
2. $x \mapsto e^{-x} \ln(1 + x)$, $n = 3$
3. $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$, $n = 3$
4. $x \mapsto (1 + 2x)^{\frac{1}{1+x}}$, $n = 3$
5. $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1 + x)}$, $n = 3$
6. $x \mapsto x - x^3 + x^4$, $n \in \{2, 4, 15\}$
7. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $n = 4$
8. $x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$, $n = 2$

07.19 Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$. En déduire $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

07.20 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln(x + 1) - x \ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{x - 1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + x)^{1/3} - (x^3 - x)^{1/3}$
5. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x \left(\ln(x^2 + x + 1) - 2\ln(x)\right)$

07.21 On pose $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, f(x) = \dfrac{\ln(1 + x) - x}{x^2}$.

1. Déterminer le $DL_2(0)$ de f. Montrer alors que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
2. Déterminer alors l'équation de la tangente en 0 et étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

07.22 Soit $f : x \mapsto x + \ln(1 + x)$.

1. Montrer que f admet au voisinage de 0 une fonction réciproque et que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.
2. Calculer ce développement limité.
3. Mêmes questions pour $f : x \mapsto x + x^2 + x^3$.

07.23 On pose $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.

07.24 On pose pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + \exp(1/x)}$.
Montrer qu'on a $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{48x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Que peut-on en déduire graphiquement ?

07.25 Donner un DL à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{x + 1 + \sqrt{1 + x^2}}$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$. En déduire l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, $-\infty$, et 0.