

20.1 Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et si oui, calculer leur somme :

- | | |
|---|---|
| <p>1. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.</p> <p>2. $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$</p> <p>3. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$</p> <p>4. $\sum_{n \geq 0} \frac{n+2^n}{n!}$</p> <p>5. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$</p> | <p>6. $\sum_{n \geq 1} \frac{3}{5^n}$</p> <p>7. $\sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{n!} a^n$</p> <p>8. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$</p> <p>9. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+3n}{2^n}$</p> <p>10. $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$</p> |
|---|---|

20.2 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

- | | |
|--|--|
| <p>1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$</p> <p>2. $u_n = \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)$</p> <p>3. $u_n = 2^{2n-1}e^{-n}$</p> | <p>4. $u_n = (e^{1/n} - 1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$</p> <p>5. $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$</p> <p>6. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$</p> |
|--|--|

20.3 Soit (u_n) définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
- Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme.

20.4 Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

- Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.
- Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .
- On pose pour tout entier $n, v_n = \ln(u_n)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = v_0 - v_{n+1}$.

- En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

20.5 Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n)}{n}$.

- Etudier la monotonie de cette suite et déterminer sa limite éventuelle.
- Etudier la nature des séries suivantes :

- $\sum_{n \geq 1} u_n$
- $\sum_{n \geq 2} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$
- $\sum_{n \geq 1} e^{u_n}$
- $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{1+u_n}$
- $\sum_{n \geq 1} u_n^2$

- On souhaite étudier la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$.

- Soit S_n la somme partielle au rang n . Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 2}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$ sont des suites adjacentes.
- Conclure sur la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.