

17.1 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 représenté dans la base canonique

de \mathbb{R}^3 par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Déterminer le rang de f , $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

17.2 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit φ_a l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que :

$$\varphi_a(\vec{e}_1) = a\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \quad \varphi_a(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + a\vec{e}_2, \quad \varphi_a(\vec{e}_3) = a\vec{e}_3$$

1. Ecrire la matrice de φ_a dans la base \mathcal{B} .
2. Déterminer suivant les valeurs de a le rang de φ_a , le noyau de φ_a et l'image de φ_a .

17.3 On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = X^2P''(X) - 2XP(X)$.

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le rang, le noyau et l'image de f .

17.4 Soit φ une application définie dans $\mathbb{R}_n[X]$ par, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = 2XP'(X) - P''(X)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et exprimer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Calculer les coordonnées de $\varphi(P)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de φ .

17.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - MA$$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

17.6 Soit $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3

dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est M .

1. Soit $\vec{u} = (1, 2, -1)$. Montrer que (\vec{u}) est une base de $\text{Ker}(f)$.
2. Soient $\vec{v} = (1, 0, -1)$ et $\vec{w} = (1, -1, 0)$. Calculer $f(\vec{v})$ et $f(\vec{w})$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 et donner $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u)$
4. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(Id - f)$.

17.7 Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

17.8 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et on suppose qu'il existe $\vec{x}_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ et $u^n(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Montrer que $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0), u^2(\vec{x}_0), \dots, u^{n-1}(\vec{x}_0))$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.

17.9 Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts deux à deux. Soit f l'application définie par : $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $P \mapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$.

1. Montrer que f est un isomorphisme.
2. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base can. de \mathbb{R}^3 . Donner $f^{-1}(\vec{e}_1), f^{-1}(\vec{e}_2), f^{-1}(\vec{e}_3)$.

17.10 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 . On définit l'endomorphisme φ de \mathbb{R}^4 par $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \varphi(\vec{e}_i) = \vec{e}_{i+1}$ et $\varphi(\vec{e}_4) = \vec{e}_1$.

1. Montrer que φ est un automorphisme et donner $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
2. Calculer φ^{-1} et en déduire la valeur de A^{-1} .