07.1 Montrer que :

1. la composée de deux applications injectives est injective.
2. la composée de deux applications surjectives est surjective.

07.2 Soient E, F et G trois ensembles non vides.
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ injective et f surjective, alors g injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ surjective et g injective, alors f surjective.

07.3 Soient E et F non vides et soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que f injective $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(A)) = A$
2. Montrer que f surjective $\Longleftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) = B$
3. Montrer que f injective $\Longleftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

07.4 Pour chaque application et pour tout y élément de l'ensemble d'arrivée, déterminer le nombre d'antécédent de y :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 + 3x + 4 \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1/2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{4x+5}{6x-3} \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1+x}{1-x} \end{array}$
4. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & (a+b, a-b) \end{array}$

07.5 On considère les deux fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

1. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.
2. Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

07.6 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe au moins un réel x_0 dans $[0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

07.7 Soit P un polynôme de degré n avec n un entier impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

07.8 Soit f une fonction décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique réel x_0 qui vérifie $f(x_0) = x_0$.

07.9 Montrer que l'équation $x^2 e^x = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on note α. Vérifier qu'on a $\alpha \in [0,1]$.

07.10 Montrer que l'équation $\ln(x) = -x$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

07.11 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$.
Montrer que f réalise une bijection de $[\sqrt{e}, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.

07.12 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive notée u_n.
2. Calculer u_1 et u_2. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < \dfrac{2}{3}$.
3. Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ f_{n+1}(x) < f_n(x)$
4. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$.
5. Déterminer enfin les variations de la suite (u_n).