03.1 Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z=(3+2i)(5+i)-(2-i)(1+i)$
2. $z_2=\dfrac{1}{1+i}-1$
3. $z_3=\dfrac{1}{i}$
4. $z_4=\dfrac{(2+i)^2}{1-3i}$
5. $z_5=(i-\sqrt{2})^3$
6. $z_6=\dfrac{1}{\dfrac{1}{i+1}-1}$

03.2 Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

1. $z_1=1-i$
2. $z_2=1+i$
3. $z_3=1+\sqrt{3}i$
4. $z_4=-2$
5. $z_5=-\sqrt{2}i$
6. $z_6=(1+\sqrt{3}i)^5$

03.3 Montrer que : $\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, $\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

03.4 Soit $t\in\mathbb{R}$. Déterminer le module de $z_1=t^2+2it-1$ et de $z_2=\dfrac{1+it}{1-it}$, simplifiés au maximum.

03.5 Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Mettre les complexes $z_1=1+e^{i\theta}$ et $z_2=1-e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique.

03.6 Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx),\qquad B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$$
$$C_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx),\qquad D_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$$

03.7 Soit a un réel strictement positif. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (donner les solutions sous forme algébrique et exponentielle) :

1. $z^2=a$
2. $z^2=-a$
3. $z^2=ia$
4. $z^2=-ia$
5. $z^2=-a^2$
6. $z^2=ia^2$

03.8 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $iz+5i-3=(1-4i)z-1$
2. $(iz+1)^2(2z-3i)=0$
3. $z^2+z+1=0$
4. $z^2=8-6i$
5. $iz^2+(4i-3)z+i-5=0$
6. $z^3=i$
7. $z^6+64=0$
8. $e^z=2+2i$

03.9 On note $\omega=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$.
On pose $u=\omega+\omega^2+\omega^4$ et $v=\omega^3+\omega^5+\omega^6$.
Calculer $u+v$ et uv. En déduire u et v.

03.10 En utilisant la Formule de Moivre, exprimer $\cos(2x)$, $\cos(3x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

03.11 Démontrer les formules :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a)+\cos(b)=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\sin(a)+\sin(b)=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

03.12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sin(3x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(3x)\geqslant-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(x)\geqslant 0$
4. $\cos(x)=\sin(x)$
5. $\cos^2(x)\geqslant\sin^2(x)$.

03.13 Linéariser les expressions suivantes, i.e. les écrire en sommes de cosinus et de sinus (sans puissances) :

$$\sin^2(x),\quad \sin^6(x),\quad \sin^2(x)\cos^3(x)$$