01.1 Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n^2 - n + 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^{n-1}}{3^{n+1}}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

01.2 Conjecturer puis démontrer une expression de u_n en fonction de n dans les cas suivants :

1. $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$
3. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2^n$

01.3 1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\dfrac{n-2}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-2}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{3n}{n+1}$

01.4 Démontrer par récurrence les résultats suivants :

1. $\forall n \geqslant 1,\ 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n + 1$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, (a-b)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} b^{n-k}\right) = a^n - b^n$

01.5 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{n}{2^n}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$. La suite (u_n) est-elle majorée ?
2. Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ n + 2 \leqslant 2^n$. La suite (u_n) est-elle minorée ?

01.6 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 4$.
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
De même pour (v_n) donnée par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 3v_n + 4$.

01.7 Soit (u_n) la suite définie par ces deux premiers termes $u_0 = 4$ et $u_1 = 8$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$.

01.8 Soit (u_n) définie par $u_0 = -1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3 + u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant u_n \leqslant 0$. En déduire le sens de variations de la suite (u_n).
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$. Déterminer une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

01.9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n+3} \frac{3^{k-1}}{4^k}, \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} 4^{-k}$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} 5.3^{2k}, \qquad S_5 = 3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 972,$$

$$S_6 = 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots + \frac{2^{10}}{3^9}, \qquad S_7 = 2 - \frac{4}{3} + \frac{8}{9} - \cdots + \frac{2^{10}}{3^9}$$

$$S_8 = \sum_{k=1}^{n} k(k^2 - 2), \qquad S_9 = \sum_{k=2}^{25} (k+1)(k+2), \qquad S_{10} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

$$S_{11} = \prod_{i=2}^{n} \frac{i^2 - 1}{i^2}, \qquad S_{12} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2, \qquad S_{13} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$