

Soutien du 11 mai

On rappelle que, lorsque x est au voisinage de 0, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

Plus généralement, la formule de **Taylor-Young** donne que :

si f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

1. Ecrire les $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

b) $\frac{1}{2-x+x^2}$.

c) $(\ln(1+x))^2$

2. Si on sait que f est \mathcal{C}^∞ et que

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

3. Écrire le développement asymptotique de $x\cos(\frac{1}{x})$ au voisinage de $+\infty$. On donnera 2 termes.

4. Retrouver les DL suivants au voisinage de 0:

$$\cos(x)\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\sin(x)\exp(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2}x - \frac{5}{128}\sqrt{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(1+\sin^2 x) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

Soutien du 11 mai : Corrigé

1. a) Par addition et composition des DL usuels on a :

$$2 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)$$

b) Par composition des DL on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-x+x^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right)^3 \right) + o(x^3) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x}{2} \right)^2 - 2 \frac{x}{2} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x}{2} \right)^3 \right) + o(x^3) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (\ln(1+x))^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 \\ &= x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)^2 \\ &= x^2 \left(1 + 2 \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right)^2 + o(x^2) \right) \\ &= x^2 \left(1 - x + \frac{11x^2}{12} + o(x^2) \right) \\ &= x^2 - x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

2. D'après le théorème de Taylor Young, on a :

$$f(0) = 1 ; f'(0) = 0 ; \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Donc } f^{(2)}(0) = 1 \text{ et } f^{(3)}(0) = -3$$

3. Par composition, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a :

$$\begin{aligned} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) &= x \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &= x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

4. Par produit ou composition.