1. (a) Si l'urne contient initialement une seule boule, alors elle est tirée dès le premier tirage, et l'urne est vidée dès le premier tirage. Ainsi, $\boxed{X_1 = 1}$, c'est-à-dire, X_1 est la variable certaine égale à 1. On a donc $\mathbb{E}(\mathbb{X}_{\mathbb{1}}) = \mathbb{1}$.

   (b) Si l'urne contient deux boules numérotées 1 et 2, soit on tirage la boule 1, et on retire donc toutes les boules de l'urne et le jeu s'arrête là, soit on tire la boule 2, et il reste une boule pour le deuxième tirage. L'urne est alors nécessairement vidée à l'issue du deuxième tirage. Ainsi, $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$, et $[X_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si on tire la boule 1 au premier tirage. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

   Ainsi, $\boxed{X_2 \text{ suit une loi uniforme sur } [\![1, 2]\!]}$, donc $\boxed{\mathbb{E}(X_2) = \frac{3}{2}}$.

   (c) Si l'urne contient initialement 3 boules :
   - on peut tirer dès le premier tirage la boule 1, et le jeu s'arrête là.
   - on peut tirer la boule 2, dans ce cas, il reste une boule pour le deuxième tirage, et le jeu s'arrête au bout de 2 tirages.
   - on peut tirer d'abord la boule 3, et il reste alors 2 boules dans l'urne : soit on tire ensuite la boule 1 et le jeu s'arrête au deuxième tirage, soit on tire la boule 2, et on peut effectuer un troisième tirage, qui est nécessairement le dernier, puisqu'il ne reste plus qu'une boule

   Ainsi, on a :

$$\boxed{X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]}$$

   L'évenement $[X_3 = 1]$ est réalisé si et seulement si on tire la boule 1 au premier tirage, donc :

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(N_1 = 1) = \frac{1}{3}$$

   L'événement $[X_3 = 3]$ est réalisé si et seulement si on tire la boule 3, puis la boule 2, puis la boule 1. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3 = 3) &= \mathbb{P}([N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]) \\ &= \mathbb{P}(N_1 = 3)\mathbb{P}_{[N_1=3]}(N_2 = 2)\mathbb{P}_{[N_1=3]\cap[N_2=2]}(N_1 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

   car lors de ces trois tirages, on a dans cette configuration, respectivement 3, 2 et 1 seule boule dans l'urne, avec équiprobabilité des tirages.

   Puisque $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_3 = 1) - \mathbb{P}(X_3 = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

   Ainsi, on a la loi de X_3 :

$$\boxed{X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}, \quad \mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{6}}$$

   On a alors :

$$\mathbb{E}(X_3) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{11}{6}}$$

2. (a) Dans le meilleur des cas, on tire la boule 1, et le jeu s'arrête à l'issue du premier tirage. Dans le pire des cas, on ne retire qu'une boule à chaque fois (ce qui revient à tirer à chaque étape la boule de numéro maximal), et on effectue donc n tirages. Ainsi, $1 \leqslant X_n \leqslant n$.
Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles : si $k \in [\![2, n-1]\!]$, il est possible de tirer d'abord la boule numéro k (il reste alors $k-1$ boules dans l'urne), puis pour chacun des tirages suivants, tirer le plus grand numéro restant (donc retirer une seule boule à chaque étape). On effectuera alors k tirages pour vider l'urne.
Ainsi :

$$\boxed{X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$$

(b) L'événement $[X_n = 1]$ est réalisé si et seulement si on vide l'urne en 1 tirage, donc si et seulement si on tire la boule 1 au premier tirage. Les tirages étant équiprobables, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}}$$

L'événement $[X_n = n]$ est réalisé si et seulement si on ne retire qu'une seule boule à chaque tirage, ce qui, comme on l'a dit précédemment, revient à tirer à chaque tirage le plus grand numéro restant. En appliquant la formule des probabilités composées (comme dans la question 1c), on obtient que :

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{1}{n!}}$$

(c) De façon évidente, les tirages étant équiprobables, N_1 suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$:

$$\boxed{N_1(\Omega) = [\![1, n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(N_1 = i) = \frac{1}{n}}$$

On a alors :

$$\mathbb{E}(N_1) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(N_1 = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} = \boxed{\frac{n+1}{2}}$$

(d) Soient $i \in [\![2, n]\!]$ et $k \in [\![2, n]\!]$.

- Si $i \leqslant k-1$ et $[N_1 = i]$ est réalisé, il reste au plus $k-2$ boules dans l'urne à l'issue du premier tirage, donc on effectue au plus $k-2$ autres tirages, en plus du premier. Ainsi, on effectue en tout au plus $k-1$ tirages et l'événement $[X_n = k]$ ne peut donc pas être réalisé. Donc

$$\boxed{\mathbb{P}_{[N_1 = i]}(X_n = k) = 0}$$

- Si $i \geqslant k$, à l'issue du premier tirage, il reste $i-1$ boules dans l'urne, numérotées de 1 à $i-1$. L'événement $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement si on effectue exactement $k-1$ tirages après le premier pour vider l'urne. Or, à l'issue du premier tirage, l'urne contient $i-1$ boules numérotées de 1 à $i-1$. Ainsi, on est dans les conditions initiales de l'expérience définissant X_{i-1}. Par conséquent, vider l'urne en exactement $k-1$ tirages à partir du deuxième tirage est un événement de même probabilité que $[X_{i-1} = k-1]$. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[N_1 = i]}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1)}$$

- Si $[N_1 = 1]$ est réalisé, alors l'expérience s'arrête au premier tirage, et X_n, prend la valeur 1. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[N_1 = 1]}(X_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 1 \\ 1 & \text{si } k = 1 \end{cases}}$$

- Si $[N_1 = i]$ est réalisé, alors $[X_1 = 1]$ ne peut pas être réalisé, sauf si $i = 1$, et dans ce cas, $[X_1 = 1]$ est réalisé de façon certaine. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[N_1=i]}(X_n = 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > 1 \\ 1 & \text{si } i = 1 \end{cases}}$$

3. (a) La famille $([N_1 = i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$ formant un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales. On a donc pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_1 = i)\mathbb{P}_{[N_1=i]}(X_n = k) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \\
&= \boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=k-1}^{n-1} \mathbb{P}(X_i = k-1)}
\end{aligned}$$

(b) En particulier, on a :

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_i = 1) = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}}$$

(c) Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= (n+1)!\mathbb{P}(X_{n+1} = n) - n!\mathbb{P}(X_n = n-1) \\
&= \frac{(n+1)!}{n+1} \sum_{i=n-1}^{n} \mathbb{P}(X_i = n-1) - n!\mathbb{P}(X_n = n-1) \\
&= n! \sum_{i=n-1}^{n-1} \mathbb{P}(X_i = n-1) \\
&= n!\mathbb{P}(X_{n-1} = n-1) \\
&= \frac{n!}{(n-1)!} = \boxed{n}
\end{aligned}$$

Ainsi, par télescopage :

$$v_n - v_2 = \sum_{k=2}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=2}^{n-1} k$$

donc puisque $v_2 = 2!\mathbb{P}(X_2 = 1) = 1$, on a :

$$v_n = v_2 + \sum_{k=2}^{n-1} k = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = n-1) = \frac{1}{2(n-2)!}}$$

4. Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([N_1 = i] \cap [X_n = k]) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} k\mathbb{P}(N_1 = i)\mathbb{P}_{[N_1=i]}(X_n = k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_1 = i) \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}_{[N_1=i]}(X_n = k)
\end{aligned}$$

5. Soit $i \in [\![2, n]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}_{[N_1=i]}(X_n = k) &= \sum_{k=2}^{i} k\mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) = \sum_{k=1}^{i-1} (k+1)\mathbb{P}(X_{i-1} = k) \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} k\mathbb{P}(X_{i-1} = k) + \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(X_{i-1} = k) \\
&= \mathbb{E}(X_{i-1}) + 1 \quad (\text{car } X_{i-1}(\Omega) = [\![1, i-1]\!])
\end{aligned}$$

Si $i = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}_{[N_1=1]}(X_n = k) = \mathbb{P}_{[N_1=1]}(X_n = 1) = 1 = \mathbb{E}(X_0) + 1$$

en admettant que, X_0 correspondrait au nombre de tirages nécessaires pour vider une urne déjà vide, donc on peut poser par convention que $X_0 = 0$.
Ainsi, on a bien que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}_{[N_1=i]}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_{i-1}) + 1$$

6. D'après les deux questions précédentes, on a donc :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_1 = i) \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}_{[N_1=i]}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{E}(X_{i-1}) + 1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i) + 1$$

(car $\mathbb{E}(X_0) = 0$), on en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
n\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i) + n \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} \mathbb{E}(X_i) + n - 1 + (\mathbb{E}(X_{n-1}) + 1) \\
&= (n-1)\mathbb{E}(X_{n-1}) + \mathbb{E}(X_{n-1} + 1
\end{aligned}$$

$$= n\mathbb{E}(X_{n-1}) + 1$$

En divisant par n, on obtient bien que :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}}$$

7. On montre alors en réitérant le raisonnement de la précédente que :

$$\forall n \geqslant 1, \ \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \qquad = \ln(n) + \gamma + o(1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \boxed{\ln(n)}$$