Soutien du 9 juin

Une urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en appliquant la règle suivante : si une boule tirée porte le numéro k, avant de procéder au tirage suivant, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U_n de toutes ses boules. On note pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, N_k le numéro de la boule tirée lors du k-ième tirage, en convenant que N_k prend la valeur 0 si ce tirage n'a pas lieu.
On pose par convention $X_0 = 0$.

1. (a) Donner la loi de X_1 et son espérance.
   (b) Donner la loi de X_2 et vérifier que $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{3}{2}$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(X_3 = 1)$. Montrer que $\mathbb{P}(X_3 = 3) = \dfrac{1}{6}$.
   En déduire la loi de X_3 et son espérance.
2. Soit maintenant n quelconque dans $\mathbb{N}^*$
   (a) Déterminer $X_n(\Omega)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
   (c) Déterminer la loi de N_1, et montrer que $\mathbb{E}(N_1) = \dfrac{n+1}{2}$.
   (d) Soient $i \in [\![2, n]\!]$ et $k \in [\![2, n]\!]$. Montrer que :
   $$\mathbb{P}_{[N_1=i]}(X_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant k-1 \\ \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) & \text{si } i \geqslant k \end{cases}$$
   Que vaut $\mathbb{P}_{[N_1=1]}(X_n = k)$? Que vaut $\mathbb{P}_{[N_1=i]}(X_n = 1)$?
3. (a) Montrer à l'aide de la formule des probabilités totales que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:
   $$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k-1}^{n-1} \mathbb{P}(X_i = k-1)$$
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
   (On ne cherchera pas à simplifier le résultat)
   (c) Pour tout $n \geqslant 2$, on note $v_n = n!\ \mathbb{P}(X_n = n-1)$.
      i. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $v_{n+1} - v_n = n$.
      ii. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $v_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$, puis en déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_n = n-1)$.
4. Montrer que : $\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{P}(N_1 = i) \left(\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}_{[N_1=i]}(X_n = k) \right) \right)$.
5. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
   $$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}_{[N_1=i]}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_{i-1}) + 1$$
6. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$: $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_i) + 1$,
   puis que :
   $$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$
7. Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, puis donner un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$