Soutien du 17/02/2020

Exercice 1 (ULM 2019)

Première partie : étude de deux matrices particulières. On pose

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) La matrice **A** est-elle anti-symétrique ? La matrice **B** est-elle anti-symétrique ?

(2) Démontrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(3) Soit u l'application linéaire associée à la matrice A.
Déterminer le rang de u et la dimension de son noyau. Donner une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 2 : Soit E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F. Parmi les applications ci-dessous donner celles qui sont linéaires, déterminer le noyau et l'image et préciser si elle sont injectives, surjectives ou bijectives.

(1) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ donné. $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

(2) $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

(3) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (0, 2x + y, x + 3y)$.

Exercice 3 : Projecteurs

Les parties sont indépendantes

Partie A : On considère deux projecteurs p et q de $\mathbb{R}^n$ qui commutent.

1) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2) Prouver que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$
3) Montrer que $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Partie B : On considère p et q deux projecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que p+q = Id et on définit l'endomorphisme

$$f = 3p - q.$$

1) Montrer que le polynôme $X^2 - 2X - 3$ annule f.
2) En déduire que f est bijectif et déterminer f^{-1} en fonction de f et Id.

Partie C : On considère p un projecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que Id-p est aussi un projecteur.

Partie D :

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$ et l'on considère φ la projection sur la droite $(d) : y = \frac{x}{2}$ parallèlement à la droite $(d') : y = -x$.

1. *Faire un schéma représentant ces deux droites et la construction de l'image de $(1, 2)$ par φ.*

2. *Déterminer l'expression algébrique de φ et en déduire qu'elle est linéaire.*

3. *Déterminer $\mathrm{Im}\,\varphi$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et les représenter.*

Soutien du 17/02/2020

Exercice 4 :

Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 5 :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = Vect(a)$, déterminer un vecteur qui convient.
2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$
   a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$
   b. En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $Im(f)$.

On pourra utiliser une autre méthode.

3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $Im(f)$.
4. A-t-on $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$?

`