Si vous vous ennuyez…(again)

A Approximation affine de $\exp$ au voisinage de 0

On notera f la fonction exponentielle

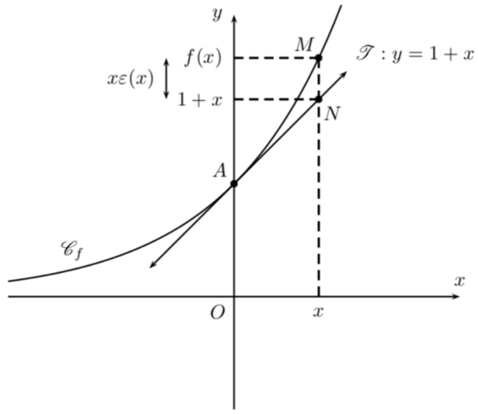
$$f : x \mapsto \mathrm{e}^x.$$

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, en particulier en 0. De plus, $f'(0) = 1$, c'est-à-dire, en reprenant la définition du nombre dérivé

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

En posant $\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} - 1$, on a donc

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + x\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$



Ainsi, au voisinage de 0, e^x s'écrit comme la somme du polynôme $1 + x$ et d'un terme $x\varepsilon(x)$ où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Par conséquent, pour x voisin de 0, nous pouvons faire l'approximation

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + x \qquad (x \text{ « proche » de } 0)$$

On dit que $1+x$ est une **approximation affine locale** de e^x au voisinage de 0. Remarquez que $y = 1+x$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en 0. Cette approximation affine s'interpréte géométriquement : lorsque x est suffisamment proche de 0, on peut confondre la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la tangente $\mathscr{T}$.

B Et si on pouvait faire « mieux »...

Nous avons obtenu précédemment une approximation affine locale de la fonction $\exp$ au voisinage de 0. L'idée maintenant serait d'obtenir une *approximation locale* ***polynômiale*** au voisinage de 0. Graphiquement, cela revient à déterminer, un polynôme dont la courbe représentative se rapproche de la fonction $\exp$ au voisinage du point $A(0; 1)$.

C'est le mathématicien BROOK TAYLOR qui est à l'origine (en 1712) de ces approximations d'une fonction *régulière* au voisinage d'un point par des polynômes (qui portent son nom). Lorsque l'on fait une approximation, il est toujours souhaitable d'avoir un contrôle de l'erreur commise. L'étude de l'erreur d'approximation restera vaine, il faudra attendre ses successeurs pour obtenir une expression plus fine de l'erreur. Nous allons dans la suite de notre étude considérer les intégrales de la forme

$$I_n(x) = \int_0^x (x-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$$

où x est réel et n entier naturel non nul.

Problème

1) **Approximation par un trinôme du second degré.** On considère l'intégrale

$$I(x) = I_1(x) = \int_0^x (x-t)\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

(a) En intégrant par parties, démontrer que $I(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x)$.

(b) Soit $x \in [0; +\infty[$. Démontrer que pour tout $t \in [0; x]$, on a $1 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x$. En déduire l'encadrement :

$$\text{pour tout } x \in [0; +\infty[\qquad \frac{x^2}{2} \leqslant I(x) \leqslant \frac{x^2\mathrm{e}^x}{2}.$$

(c) Soit $x \in]-\infty; 0[$. Démontrer que pour tout $t \in [x; 0]$, on a $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant 1$. En déduire l'encadrement :

$$\text{pour tout } x \in [-\infty; 0[\qquad \frac{x^2\mathrm{e}^x}{2} \leqslant I(x) \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

(d) Déduire de ce qui précéde que $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$. En déduire l'existence d'une fonction ε_1 telle que

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

2) **Approximation par un polynôme du troisième degré.** On considère l'intégrale

$$J(x) = I_2(x) = \int_0^x (x-t)^2 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

(a) En faisant deux intégrations par parties successives, démontrer que $J(x) = 2\left(\mathrm{e}^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)\right)$.

(b) Soit $x \in [0;+\infty[$. Démontrer l'encadrement :

$$\text{pour tout } x \in [0;+\infty[\qquad \frac{x^3}{3} \leqslant J(x) \leqslant \frac{x^3\mathrm{e}^x}{3}.$$

On démontre de la même façon et on admet l'encadrement :

$$\text{pour tout } x \in [-\infty;0[\qquad \frac{x^3}{3} \leq J(x) \leq \frac{x^3 e^x}{3}$$

(c) Déduire de ce qui précède que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)}{x^3} = \frac{1}{6}$. En déduire l'existence d'une fonction ε_2 telle que

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_2(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Plus généralement, nous obtenons de la même façon

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)}$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cette écriture est appelée **développement limité (d.l.) à l'ordre** n **de** exp **au voisinage de** 0.

Le polynôme

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\times 3} + \frac{x^4}{2\times 3\times 4} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

est appelée **partie régulière** du d.l. à l'ordre de n de exp en 0.