Révisions : calcul de somme par changement d'indice

Énoncé :

(a) Vérifier que pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{k}.$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Corrigé :

(a) Soit $k \geqslant 2$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{k} &= \frac{(k-1)k + (k+1)k - 2(k-1)(k+1)}{2(k+1)(k-1)k} \\
&= \frac{k^2 - k + k^2 + k - 2(k^2-1)}{2(k^2-1)k} \\
&= \frac{2}{2(k^3-k)} = \frac{1}{k^3-k}
\end{aligned}$$

(b) On peut donc écrire que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \left(\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} + \left(\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{4} + \left(\frac{n-(n+1)}{2n(n+1)} \right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}
\end{aligned}$$