Révisions sur le chapitre 10 : « autres espaces vectoriels »

1. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ P(1) = P(2) = 0\}$.
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ et en déterminer une base et la dimension.

---

2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \longmapsto & P(x+1) - P(x) \end{array}$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
   (b) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.
   (c) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
   (d) On pose $g = f - 2Id$.
   Déterminer une base de $\mathrm{Im}(g)$ et de $\mathrm{Ker}(g)$.

---

3. Montrer que $\mathcal{B} = (1, x-1, (x-1)^3, (x+1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

---

4. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ P & \longmapsto & \begin{pmatrix} P(0) & P(1) \\ P'(0) & P'(1) \end{pmatrix} \end{array}$.
   (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[x]$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

---

5. Soit $f : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(M) I_2 - 2M \end{array}$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer dans l'ordre de votre choix l'image, le noyau et le rang de f.
   (c) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?