Exercice 1 : Sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

On considère le sous espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (u,v,w) où u = (1,3,-1,0) ; v = (5,4,-2,1) et w = (-13,5,1,-4).

1. a) Justifier que la famille (u,v) est libre.
   b) Montrer que w peut s'écrire comme combinaison linéaire de u et v.
   c) En déduire une base et la dimension de F.

2. On considère le sous espace vectoriel G engendré par x = (1,3,0,0) et y= (6,7,-3,2).
   a) Justifier que (u,v,x,y) est une base de $\mathbb{R}^4$.
   b) Décomposer le vecteur w dans cette base.

3. Soit H le sous espace vectoriel défini par H={(a,b,c,d) ∈ $\mathbb{R}^4$/ 3a-b+7d= 0 et a+b+4c-2d=0}
   a) Déterminer une base de H.
   b) Montrer que u ∈ H et que v ∉ H. En déduire une base de $F \cap H$.
   c) Quelle est la dimension de F+H ? En donner une base, en justifiant.

Exercice 1

1. (a) u et v sont deux vecteurs clairement non colinéaires donc $(u;v)$ est une famille libre.
   (b) Etant donné que la quatrième composante de u est nulle, on a cherche a tel que $w = au - 4v$. En regardant les premières composantes de u et v on trouve $a = 7$. On vérifie que $7 \times 3 - 4 \times 4 = 5$ et que $7 \times (-1) - 4 \times (-2) = 1$ ainsi on a bien $w = 7u - 4v \in Vect(u, v)$.
   (c) On sait que $F = Vect(u, v, w)$ avec (u, v) libre et w combinaison linéaire de u et v donc une base de F est la famille (u, v) et sa dimension est 2.
2. (a) Soient a, b, c et d quatre réels tels que $au + bv + cx + dy = 0$. On obtient le système suivant :
   $$\begin{cases} a + 5b + c + 6d = 0 \\ 3a + 4b + 3c + 7d = 0 \\ -a - 2b - 3d = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -2d \\ c = 3d \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$
   La famille (u, v, x, y) est une famille libre de quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ qui est un espace de dimension 4 donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) D'après la question 1.(b), le vecteur w est combinaison linéaire de u et v donc on peut donner sans calculs les coordonnées de w dans la base (u, v, x, y) soit $(7; -4; 0; 0)$.
3. (a) $H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / b = 3a + 7d \text{ et } c = -a - \frac{5}{4}d\}$
   donc $H = \{(a, 3a + 7d, -a - \frac{5}{4}d, d), a \in \mathbb{R} \text{ et } d \in \mathbb{R}\}$
   ce qui donne $H = Vect((1; 3; -1; 0), (0; 28; -5; 4)) = Vect(u, (0; 28; -5; 4))$. La famille $((1; 3; -1; 0), (0; 28; -5; 4))$ est composée de 2 vecteurs non colinéaires donc elle est libre et elle est génératrice par définition d'un sous espace vectoriel engendré. C'est donc une base de H.
   (b)
   - D'après la question précédente on a bien $u \in H = Vect(u, (0; 28; -5; 4))$.
     Remarque : On peut vérifier que les coordonnées de u satisfont les 2 équations de H si on a trouvé une autre famille génératrice pour H :
     $3 \times 1 - 3 + 7 \times 0 = 3 - 3 = 0$ et $1 + 3 + 4 \times (-1) - 2 \times 0 = 4 - 4 = 0$.
     Donc $u \in H$.
   - Vérifions que les coordonnées de v ne vérifient pas au moins une équation de H (le contraire de "et" est "ou") : $3 \times 5 - 4 + 7 \times 1 = 8 \neq 0$ donc $v \notin H$.
   - $u \in F \cap H$ donc $Vect(u) \subset F \cap H$ ainsi $1 \leq dim(F \cap H)$. De plus $F \cap H \subset F$ donc $dim(F \cap H) \leq 2$. Si $dim(F \cap H) = 2$ alors on aurait $F \cap H = F$ donc $F \subset H$ ce qui n'est pas possible car $v \in F$ mais $v \notin H$. Ainsi $dim(F \cap H) = 1$ et $F \cap H = Vect(u)$. Une base de $F \cap H$ est donc (u).

   (c) $F \cap H$ est donc de dimension 1. D'après la formule de Grassmann on a : dim(F+H)=dim(F)+dim(H)-dim($F \cap H$)= 2+2-1= 3. C'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ engendré par exemple par (u,v, (0 ;28 ;-5 ;4)). En effet la famille (u,v) est libre et $(0; 28; -5; 4) \notin F$.

Problème 1 : Algèbre linéaire : Changement de base

On considère les matrices A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1) a) Calculer $(A-I)^2$. En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.
   b) Que peut-on en déduire pour Ker(A) ?
   c) Que peut-on en déduire pour l'application f : est-elle injective, surjective, bijective ?

2) On pose N $=A-I$.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer A^n comme combinaison linéaire de I et N puis comme combinaison linéaire de I et A.
   c) Vérifier que l'expression obtenue à la question 2a) est encore valable pour n =-1.

3) On pose $u_1=(f-Id)(e_1)$ et $u_2 = e_1+e_3$ où (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   a) Quelle est la matrice de $f-Id$ dans (e_1,e_2,e_3) ?
   b) Calculer u_1 et u_2.
   c) Justifier que le rang de $f-Id$ est 1.
   d) Montrer que (u_1,u_2) est une base de Ker$(f-Id)$.

4) a) Justifier que B = (u_1,u_2,e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Justifier que $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note T cette matrice.
   c) On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer P^{-1} et vérifier que A = PTP^{-1}.

Problème 1 : EDHEC 2019

1. (a) Une matrice est inversible si et seulement si elle est inversible à gauche (ou à droite), et lorsqu'un polynôme annule une matrice, on retrouve facilement l'inverse de cette matrice
   $(A-I)^2=0 \Leftrightarrow A^2-2A+I=0 \Leftrightarrow -A^2+2A=I \Leftrightarrow A(-A+2I)=I \Leftrightarrow$
   A est inversible d'inverse $-A+2I$
   (b) Une matrice est inversible si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul et son rang est maximal
   Le noyau de A est donc $\{0\}$ et le rang de A vaut 3.
   (c) Une application linéaire a les mêmes propriétés que la matrice qui lui est canoniquement associée
   f est bijective, c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) On sait que $N^2=0$ donc pour $n \geq 2$, la formule du binôme de Newton donne $A^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k = I+nN = I+n(A-I) = (1-n)I+nA$. Cette formule est aussi valable pour $n=0$ et pour $n=1$. Ainsi pour tout entier naturel n on a : $A^n=(1-n)I+nA$.
   (b) Pour $n=-1$ on a d'une part : $A^{-1}=-A+2I$ et d'autre part $(1-n)I-nA = 2I-A$. La formule est donc vraie pour $n=-1$.
3. (a) L'application $f-id$ est canoniquement associée à $A-I=N$.
   (b) Par construction $(f-id)(e_1)$ correspond à la première colonne de la matrice N ainsi $u_1=(-1,-2,1)$. On a $u_2=(1,0,1)$
   (c) L'image d'une application linéaire g définie sur $\mathbb{R}^3$ est engendrée par les images des vecteurs d'une base : $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g(e_1), g(e_2), g(e_3))$ et le rang de g est la dimension de $\mathrm{Im}(g)$
   $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   Comme les 3 vecteurs colonnes de N sont colinéaires, on a :
   $rg(f-id) = rg(N) = 1$

(d) D'après le théorème du rang appliqué à $f-id$, on sait que : $\dim(\mathrm{Ker}(f-id))$=3 - rg $(f-id)$= 2. On cherche donc 2 vecteurs qui sont dans le noyau de $f-id$ et qui ne sont pas colinéaires. L'énoncé indique que u_1 et u_2 doivent convenir. On calcule Nu_1. On retrouve le vecteur nul. De même $Nu_2=0$.
u_1 et u_2 sont donc deux vecteurs de $\mathrm{Ker}(f-id)$. Par stabilité par combinaison linéaire on est sûr que $Vect(u_1,u_2)\subset Ker(f-id)$. Comme u_1 et u_2 sont clairement non colinéaires alors ils forment une famille libre de cardinal 2 et comme 2= $\dim(\mathrm{Ker}(f-id))$; c'est une base de $\mathrm{Ker}(f-id)$.

4. (a) On complète une famille libre en une base. La famille (u_1,u_2) est libre et $e_1\notin Vect(u_1,u_2)$ ainsi (u_1,u_2,e_1) est une famille libre de $3=dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Les colonnes de la matrice sont les images des vecteurs de la base décomposées dans cette base.
Pour $1\le i\le 2, f(u_i)=u_i$ car $u_i\in Ker(f-id)$ et
$u_1=(f-id)(e_1)\Leftrightarrow u_1=f(e_1)-e_1\Leftrightarrow f(e_1)=u_1+e_1$ donc on a bien
$T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(c) Avec la méthode de votre choix résolution d'un système, méthode de Gauss Jordan on trouve $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-0,5&0\\0&0,5&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.
On calcule alors PT= $\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$.
puis on multiplie à droite la matrice PT par P^{-1} et on retrouve bien A.

Problème 2:

Les parties B et C sont indépendantes entre elles mais il est nécessaire d'avoir bien traité la partie A pour pouvoir les aborder.
On considère dans tout l'exercice la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$$

Partie A

1) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\frac{e^x-1}{x}>0$
2) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3) a) Montrer que f est C^1 sur]-∞;0[et sur]0 ;+∞[puis vérifier que $f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}$ pour tout réel $x\neq 0$.
b) Étudier les variations de la fonction g définie pour tout réel x par : $g(x)=xe^x-e^x+1$
c) En déduire le signe de $g(x)$
d) Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
e) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
f) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
g) Justifier que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution réelle que l'on notera α.
De même on notera β l'unique réel tel que $f(\beta)=-1$.

Partie B : Étude d'une primitive de f

Pour tout réel x on pose $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.
1) Justifier que F est bien définie.
2) a) Soit α le nombre réel défini dans la partie A.
Justifier que pour tout réel $x>\alpha$,
$$\int_\alpha^x f(t)dt\ge x-\alpha.$$
En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
b) Déterminer de même $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.
c) Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.

Partie C : Étude d'une suite d'intégrales

On pose pour tout entier naturel n, $I_n=\int_0^n f(x)dx$.
1) Justifier que la suite (I_n) est croissante.
2) a) Justifier que pour tout $k\in\mathbb{N}$,
$$f(k)\le\int_k^{k+1} f(x)dx\le f(k+1)$$
b) Montrer alors que pour tout entier n≥ 2, on a :
$$ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(e^k-1)}{(n-1)!}\right)\le I_n\le ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(e^k-1)}{n!}\right)$$

Problème Inspiré d'un sujet de l'EDHEC

Partie A

1. **Méthode 1 :** Raisonnons par disjonction de cas.

   Méthode 2 : Un tableau de signes permet aussi de conclure très facilement.

2. D'après la question précédente f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-*$ en tant composée de fonctions continues.
   Montrons que f est continue en 0. On sait par équivalent usuel que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.
   Donc par composition $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} ln(\frac{e^x-1}{x}) = ln(1) = 0 = f(0)$.
   La fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

3. (a) f est clairement C^1 (et même C^∞) sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ par opérations sur les fonctions C^1, le dénominateur ne s'annulant pas. Pour tout réel $x \neq 0$, on a :
   $f'(x) = \frac{\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2} \times \frac{x}{e^x-1} = \frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}$.

   (b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. et pour tout réel x on a : $g'(x) = xe^x$.
   $g'(x)$ est du signe x donc la fonction g est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

   (c) $g(0) = 0$ donc la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc positive sur $\mathbb{R}$.

   (d) On rappelle que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(e^x-1)}$.
   g est positive donc f' est du signe de son dénominateur. Or le dénominateur de f' est du même signe que $\frac{e^x-1}{x}$. D'après la question 1), on peut donc en déduire que $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^* \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (e)
   - $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x} = 0^+$ donc par composition $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} ln(y) = -\infty$.
   - Par équivalence et croissances comparées : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc par composition : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} ln(x) = +\infty$.

   (f) La fonction f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $J = \mathbb{R}$.

   (g) Puisque la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $1 \in J$ alors l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Partie B

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question 2) de la partie A donc elle est intégrable sur $[0\,;x]$ pour tout réel x : F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $x > \alpha$. Par croissance de f on sait que pour tout réel $t \in [\alpha;x]$, $f(t) > f(\alpha)$. Alors en intégrant cette inégalité (les bornes sont dans le bon ordre) on a : $\int_\alpha^x f(t)dt > \int_\alpha^x 1dt$ soit $\int_\alpha^x f(t)dt > x - \alpha$. Avec la relation de Chasles on sait que $F(x) = F(\alpha) + \int_\alpha^x f(t)dt > F(\alpha) + x - \alpha$. Alors par comparaison, puisque $\lim_{x\to+\infty} F(\alpha) + x - \alpha = +\infty$, on a : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

   (b) Soit $x < \beta$. Par croissance de f on sait que pour tout réel $t \in [x;\beta]$, $f(t) < f(\beta)$. Alors en intégrant cette inégalité (les bornes sont dans le bon ordre) on a : $\int_x^\beta f(t)dt < \int_x^\beta -1dt$ soit $\int_x^\beta f(t)dt < -\beta + x$ ou encore en multipliant par -1 cette inégalité : $\int_\beta^x f(t)dt > \beta - x$. Avec la relation de Chasles on sait que $F(x) = F(\beta) + \int_\beta^x f(t)dt > F(\beta) + \beta - x$. Alors par comparaison, puisque $\lim_{x\to-\infty} F(\beta) + \beta - x = +\infty$, on a : $\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$

   (c) D'après le cours, on sait que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$. La fonction f est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$ ce qui permet de dire que la fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Partie C

1. Soit n un entier naturel. $I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} f(x)dx - \int_0^n f(x)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx$.
   D'après la partie A, la fonction f est **positive** sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $[n;n+1]$.
   Par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans le bon ordre, on peut en conclure que $I_{n+1} - I_n \geq 0$. La suite (I_n) est croissante.
   Remarque : On peut aussi remarquer que $I_n = F(n)$ donc (I_n) a les mêmes variations que F sur $]0;+\infty[$.

2. (a) Soit k un entier naturel. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc pour tout $x \in [k;k+1]$, on a : $f(k) \leq f(x) \leq f(k+1)$

   Par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans le bon ordre) :

$$\int_k^{k+1} f(k)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k+1)dx$$

$$(k+1-k)f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq (k+1-k)f(k+1)$$

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k+1)$$

   (b) Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On somme pour k allant de 0 à $n-1$ les inégalités de la question précédente. On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)$$

Puisque *f(0)=0* et comme le logarithme transforme un produit en une somme on a :

$$ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(e^k-1)}{(n-1)!}\right) \leq I_n \leq ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(e^k-1)}{n!}\right)$$