Nombres complexes

Définition - Propriétés

Un nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $a + bi$; $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$
On dit que $a + bi$ est la forme algébrique du nombre complexe z.
a est la partie réelle de z, on note $a = Re(z)$
b est la partie imaginaire de z, on note $b = Im(z)$.
Le nombre complexe i est tel que $i^2 = -1$.
Les complexes de la forme bi avec $b \in \mathbb{R}$, sont appelés imaginaires purs.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Équation du second degré à coefficients réels

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

- si $\Delta \geqslant 0$, les deux solutions sont réelles $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta \leqslant 0$, on peut écrire $\Delta = (i\delta)^2$ avec $\delta \in \mathbb{R}$,
  les deux solutions sont alors des nombres complexes, (conjugués l'un de l'autre)
  $z_1 = \dfrac{-b - i\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\delta}{2a}$

Le trinôme $az^2 + bz + c$ se factorise sous la forme $a(z - z_1)(z - z_2)$

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, au nombre complexe $z = a + bi$,

on peut associer le point M(a ; b)

M(a ; b) est l'image ponctuelle,

Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, alors

- le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \dfrac{z + z'}{2}$

Module et conjugué d'un nombre complexe

On appelle module du nombre complexe $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$,
le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|-z| = |z|$; $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

$|zz'| = |z|.|z'|$; $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$; $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$,
le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$.

- $\overline{\overline{z}} = z$; $|\overline{z}| = |z|$; Si $z \neq 0$ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
- $z.\overline{z} = |z|^2$ (donc $z.\overline{z}$ est un réel positif)
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\text{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $\text{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- z est réel $\Leftrightarrow z = \overline{z}$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Si M a pour affixe z et si M' a pour affixe z' alors OM = $|z|$ et MM' = $|z' - z|$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe non nul z peut être écrit sous la forme :

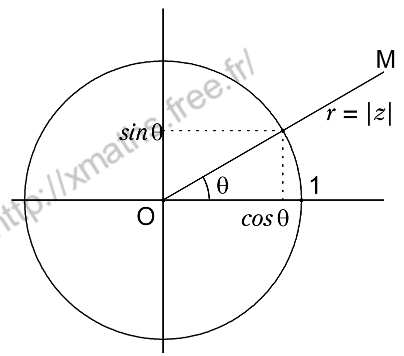
$z = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$

C'est la forme trigonométrique de z.
r est le module de z, $r = |z|$
θ est un argument de z.

Si $z = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$ alors

- $\overline{z} = r\big(cos(-\theta) + i\,sin(-\theta)\big)$

et
- $-z = r\big(cos(\theta + \pi) + i\,sin(\theta + \pi)\big)$



Arguments d'un nombre complexe

L'argument d'un nombre complexe z n'est pas unique, il est défini modulo 2π.
Si θ est un argument de z, on notera $arg\ z = \theta\ [2\pi]$ ou $arg\ z = \theta + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$
On appelle argument principal de z l'argument de z appartenant à $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$, on a $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ arg\ z = arg\ z'\ \ [2\pi] \end{cases}$

z et z' étant deux nombres complexes non nuls on a :

- $arg(zz') = arg\ z + arg\ z'\ \ [2\pi]$; $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\ arg\ z\ \ [2\pi]$
- $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg\ z - arg\ z'\ \ [2\pi]$; $arg\ (z^n) = n\ arg\ z\ \ [2\pi]$
- $arg\ (\overline{z}) = -\ arg\ z\ \ [2\pi]$; $arg\ (-z) = arg\ z + \pi\ \ [2\pi]$

Notation exponentielle

On note $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$

$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Limites
Asymptotes à une courbe

Opérations sur les limites

Limite d'une somme

Si f ou (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g ou (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ ou $(u_n)+(v_n)$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général

Limite d'un produit

Si f ou (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g ou (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ ou $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

Limite d'un inverse

Si g ou (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 par valeurs inférieures	0 par valeurs supérieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{g}$ ou $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{1}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	0

Limite d'un quotient

Si f ou (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g ou (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs sup. ou par valeurs inf.	0	0 par valeurs sup. ou par valeurs inf.	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ ou $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ suivant les signes	pas de résultat général

Les formes indéterminées

On dit qu'il y a forme indéterminée lorsqu'on ne peut pas donner de résultat général à partir des tableaux précédents.
Les formes indéterminées sont de différents types et on peut dans beaucoup de cas trouver la limite en effectuant les manipulations suivantes.

$+\infty - \infty$: Factorisation du terme "dominant". (terme de plus haut degré pour un polynôme)

$\frac{\infty}{\infty}$: Factorisation des termes "dominants" puis simplification.

$\frac{0}{0}$: Factorisation d'un terme tendant vers 0, puis simplification.

$0 \times \infty$: peut en général se ramener à l'une des formes $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Lorsque des racines carrées interviennent et que les méthodes ci-dessus ne donnent pas de résultat, on pourra multiplier par la quantité "conjuguée".

(Les notations $+\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$ ... sont des abréviations à ne pas utiliser dans un devoir rédigé)

Limites et inégalités

I est un intervalle dépendant de l'endroit où la limite est cherchée :
$]a\,;+\infty[$ pour une limite en $+\infty$, $]x_0 - h\,;x_0 + h[$ pour une limite en x_0 etc…

Limites par comparaison

Si pour tout $x \in$ I $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim g(x) = +\infty$ alors $\lim f(x) = +\infty$.
Si pour tout $x \in$ I $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$ et si $\lim g(x) = 0$ alors $\lim f(x) = \ell$.

Comparaison de limites

Si pour tout $x \in$ I $f(x) \leqslant g(x)$, si $\lim f(x) = \ell$ et $\lim g(x) = \ell'$ alors $\ell \leqslant \ell'$.

Théorème des gendarmes

Si pour tout $x \in$ I $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim g(x) = \lim h(x) = \ell$, alors $\lim f(x) = \ell$.
Ce théorème est aussi valable pour une limite infinie.

Limite d'une composée de fonctions

a, b et ℓ désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x) = \ell$.

Limites obtenues par la dérivée

Si f est une fonction dérivable en x_0 alors :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ ou encore $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Limites usuelles

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré.
La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$.
On trouvera dans les fiches "logarithme népérien" et "exponentielle" les limites correspondant à ces fonctions.

Asymptotes à une courbe

($\mathscr{C}$) étant la courbe représentative de la fonction f

Asymptote parallèle à Oy (verticale)

($\mathscr{C}$) a pour asymptote la droite d'équation $x = a$ si :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (il peut s'agir d'une limite à droite ou à gauche seulement)

Asymptote parallèle à Ox (horizontale)

($\mathscr{C}$) a pour asymptote la droite d'équation $y = b$ si :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$

Asymptote oblique , asymptote courbe

($\mathscr{C}$) a pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ si :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

($\mathscr{C}$) a pour asymptote la courbe représentative de g si :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - g(x) = 0$

Continuité - Dérivabilité

Continuité

f est continue en x_0, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ c'est-à-dire si $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

f est continue sur un intervalle I, si f est continue en tout point x_0 de I

Nombre dérivé - Fonction dérivée - Tangente

f est dérivable en x_0 lorsque $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est un nombre réel.

Cette limite est le nombre dérivé en x_0, on le note $f'(x_0)$

On a alors $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Si une fonction f est dérivable en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I, et l'application qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f au point x est appelée fonction dérivée de f. La fonction dérivée de f est notée f'.

La courbe représentative de f a pour tangente en $M_0(x_0 ; f(x_0))$ la droite T de coefficient directeur $f'(x_0)$. T a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- $u + v$ est dérivable sur I et on a $(u+v)' = u' + v'$
- uv est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$
- Si $a \in$ IR, au est dérivable sur I et on a $(au)' = au'$
- Si u ne s'annule pas sur I , alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
- Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I,
Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J, et si pour tout $x \in$ I, $u(x) \in$ J,
alors $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, u^n est dérivable en tout point où elle est définie et on a $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors e^u est dérivable sur I et on a $(e^u)' = u' e^u$

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors $\ln u$ est dérivable sur I et on a $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Application aux variations d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I,
Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
Si f' est positive ou nulle sur I, alors f est croissante sur I.
Si f' est négative ou nulle sur I, alors f est décroissante sur I.

Pour démontrer qu'une fonction f est strictement croissante sur I, il suffit de démontrer que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.
(Propriété similaire pour une fonction strictement décroissante)

Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a ; b]$.

Le théorème peut s'appliquer aussi dans le cas d'un intervalle non fermé ou non borné en utilisant les limites de f.
Par exemple : si f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; a[$, alors pour tout k appartenant à $]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) ; \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $]-\infty ; a[$.

Compléments

Si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est un nombre réel A , on dit que la fonction f est dérivable à droite en x_0 et que A est le nombre dérivé à droite de f en x_0 .
La courbe représentative de f a alors une demi-tangente de coefficient directeur A en $M_0(x_0 ; f(x_0))$
(Propriété similaire avec une limite à gauche et un nombre dérivé à gauche)
Pour qu'une fonction f soit dérivable en x_0, il faut qu'elle soit dérivable à gauche et à droite en x_0 et que les nombres dérivés à gauche et à droite soient égaux.

Primitives

Définition

On appelle primitive d'une fonction f sur un intervalle I, toute fonction F définie et dérivable sur I, dont la dérivée est f.

Si F est une primitive de f sur I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G de la forme $G = F + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction ayant des primitives sur un intervalle I, soit $x_0 \in$ I et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une et une seule primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Toute fonction continue sur un intervalle I a des primitives sur I.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitives	Intervalle
$f(x) = 0$	$F(x) = k \quad k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k \quad k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k \quad k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k \quad k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k \quad k \in \mathbb{R}$	$]0 ; +\infty[$ ou $]-\infty ; 0[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k \quad k \in \mathbb{R}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k \quad k \in \mathbb{R}$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$ $(n<0)$ $\mathbb{R}$ $(n \geq 0)$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k \quad k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k \quad k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + k \quad k \in \mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ modulo 2π
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + k \quad k \in \mathbb{R}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k \quad k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Propriétés

Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I,
alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

Si F est une primitive de f sur I et si a est un réel,
alors aF est une primitive de af sur I.

ATTENTION :
Un produit de primitives n'est pas une primitive du produit.
Un quotient de primitives n'est pas une primitive du quotient.

Sur un intervalle bien choisi :

- Une fonction de la forme $u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ a pour primitives les fonctions de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Une fonction de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitives les fonctions de la forme $2\sqrt{u} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Une fonction de la forme $u' \times e^u$ a pour primitives les fonctions de la forme $e^u + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ a pour primitives les fonctions de la forme $\ln|u| + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Une fonction de la forme $u' \times (v' \circ u)$ a pour primitives les fonctions de la forme $v \circ u + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Logarithme Népérien

Définition - Propriétés

La fonction réciproque de la fonction exponentielle est la fonction logarithme népérien. On la note $\ell n : \left]0 ; +\infty\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ell n\, x$

Pour tout réel x, on a $\ell n\,(e^x) = x$
Pour tout réel strictement positif x, on a $e^{\ell n\, x} = x$

$$\left.\begin{array}{l} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ell n\, y \\ y \in \left]0 ; +\infty\right[\end{array}\right.$$

La fonction ℓn est définie, continue et dérivable sur $\left]0 ; +\infty\right[$, et on a $(\ell n\, x)' = \dfrac{1}{x}$.

La fonction ℓn s'annule en 1, donc $\ell n\, 1 = 0$. D'autre part $\ell n\, e = 1$
La fonction ℓn est strictement croissante sur $\left]0 ; +\infty\right[$.
$x > 1 \Leftrightarrow \ell n\, x > 0$ et $0 < x < 1 \Leftrightarrow \ell n\, x < 0$

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ell n \circ u$ est dérivable sur I et on a : $(\ell n \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$

Toute fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive $\ell n\,|u|$ sur tout intervalle dans lequel u ne s'annule pas. Si u est strictement positive, $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive $\ell n(u)$.

Relation fonctionnelle

a et b étant deux réels strictement positifs, on a :

$\ell n\,(a.b) = \ell n\, a + \ell n\, b$ $\qquad$ $\ell n(a^n) = n.\ell n\, a$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$\ell n\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\,\ell n\, a$ $\qquad$ $\ell n\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ell n\, a - \ell n\, b$

$\ell n \sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ell n\, a$

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels strictement positifs, on a :
$\ell n\,(a_1.a_2.\cdots.a_n) = \ell n\, a_1 + \ell n\, a_2 + \ldots + \ell n\, a_n$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ell n\,(e^x) = x$

Limites - Variations

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\, x = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ell n\, x = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\,\ell n\, x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\,(1 + x)}{x} = 1$

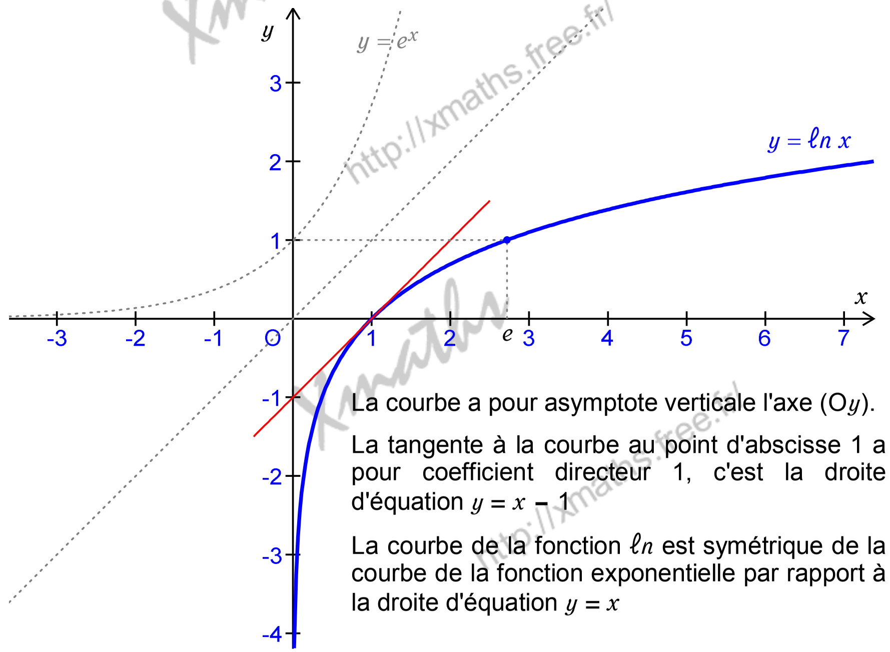
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x} = 0$; et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x^n} = 0$.

Tableau de variations

x	0		$+\infty$
ℓn	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

On dit que le nombre réel e tel que $\ell n\, e = 1$ est la base du logarithme népérien.
On a $e \approx 2{,}72$

Courbe représentative



La courbe a pour asymptote verticale l'axe (Oy).

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 1, c'est la droite d'équation $y = x - 1$

La courbe de la fonction ℓn est symétrique de la courbe de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$

Fonction exponentielle
Équations différentielles

Définition - Propriétés

Il existe une unique fonction f, dérivable sur IR, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle.

On note $exp : \mathbb{R} \to]0;+\infty[$
$x \mapsto exp(x) = e^x$

La fonction exponentielle est définie, continue et dérivable sur IR et on a $(e^x)' = e^x$

$e^0 = 1$ $e^1 = e$ Pour tout réel x, on a $e^x > 0$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur IR.

$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$ et $x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction composée $exp \circ u$ est dérivable sur I, et on a : $(exp \circ u)' = u'.exp \circ u$ ou encore $(e^u)' = u' \times e^u$

Toute fonction de la forme $u' \times e^u$ a pour primitive e^u , sur tout intervalle dans lequel u est dérivable.

Relation fonctionnelle

a et b étant deux réels, on a :

$e^{a+b} = e^a.e^b$ $e^{na} = (e^a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

Limites - Variations

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Tableau de variations

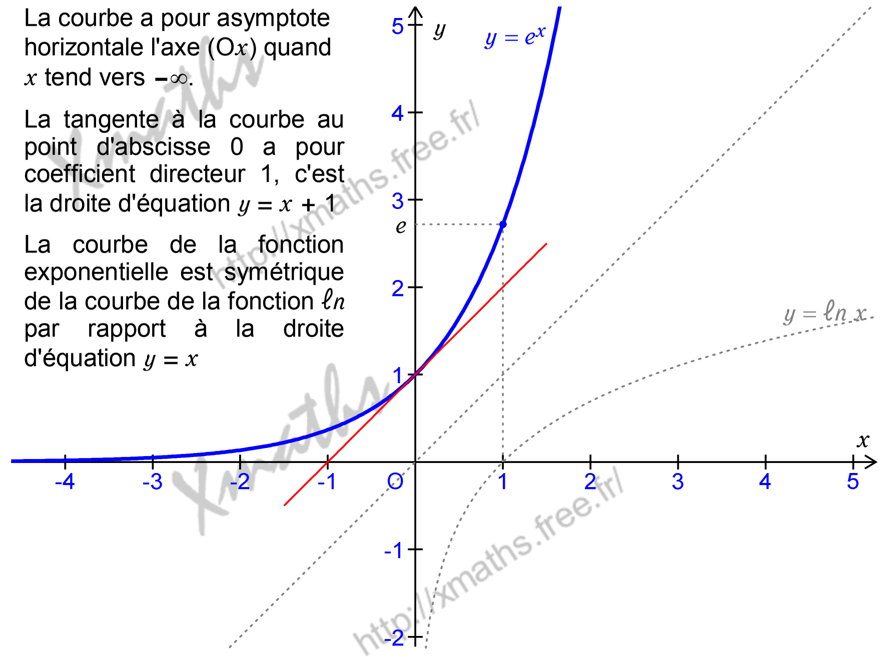
x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	↗	$+\infty$

Courbe représentative

La courbe a pour asymptote horizontale l'axe (Ox) quand x tend vers $-\infty$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 1, c'est la droite d'équation $y = x + 1$

La courbe de la fonction exponentielle est symétrique de la courbe de la fonction ℓn par rapport à la droite d'équation $y = x$



Puissances réelles

Définition - Propriétés

Les puissances réelles d'un nombre strictement positif a sont définies par : $a^x = e^{x\,\ell n\, a}$ pour tout nombre réel x.

Pour tous réels strictement positifs a et b, et pour tous réels x et y, on a :

$a^{x+y} = a^x . a^y$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

$a^{x.y} = (a^x)^y$; $(a.b)^x = a^x . b^x$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

On appelle "fonction exponentielle de base a" ($a > 0$), la fonction : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a^x = e^{x\,\ell n\, a} \end{array}$

L'étude de la fonction exponentielle de base a, se déduira facilement de l'étude de la fonction $x \mapsto e^x$ et du signe de $\ell n\, a$.

Si $0 < a < 1$, on a $\ell n\, a < 0$

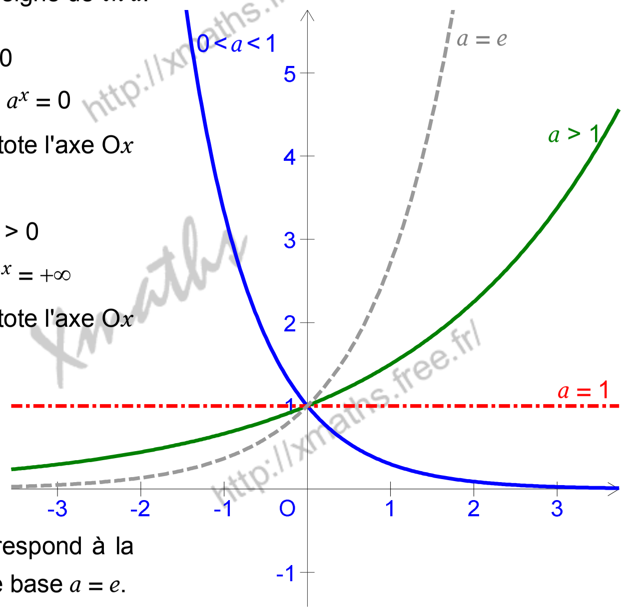
$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

La courbe a pour asymptote l'axe Ox quand x tend vers $+\infty$

Si $a > 1$, on a on a $\ell n\, a > 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

La courbe a pour asymptote l'axe Ox quand x tend vers $-\infty$



La fonction $x \mapsto e^x$ correspond à la fonction exponentielle de base $a = e$.

Fonctions puissances

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de $]0 ; +\infty[$ dans $]0 ; +\infty[$, c'est-à-dire que pour tout réel strictement positif b, il existe un et un seul réel strictement positif a tel que $a^n = b$.

On dit que a est la racine $n_{\text{ième}}$ de b, on note $a = \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$.

La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est la réciproque, sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^n$

On a en particulier $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Croissances comparées

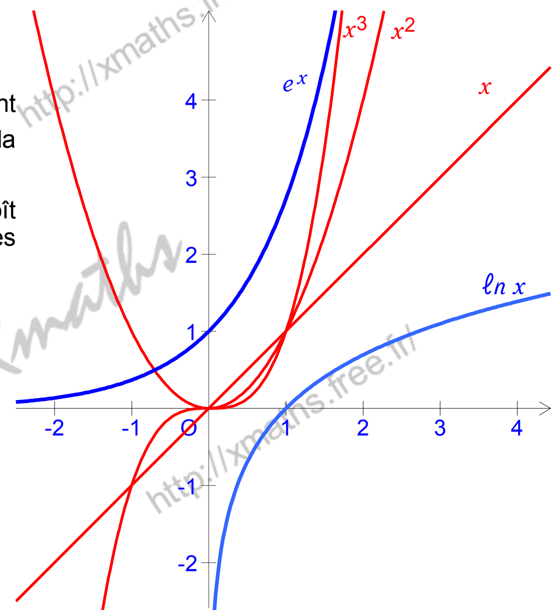
Si $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ell n\, x}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Au voisinage de $+\infty$,

les fonctions $x \mapsto x^n$ croissent infiniment plus vite que la fonction ℓn .

la fonction exponentielle croît infiniment plus vite que les fonctions $x \mapsto x^n$.



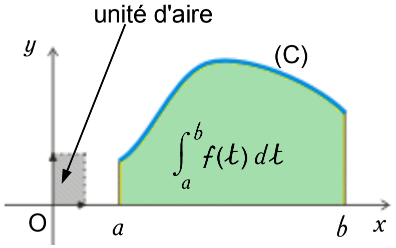
Intégrales

Définition - Interprétation graphique

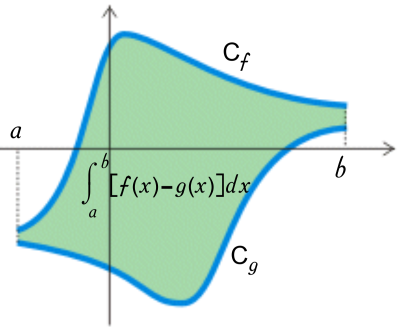
Si f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ et (C) sa courbe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$\int_a^b f(t)\,dt$ est le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

c'est-à-dire l'ensemble des points M$(x ; y)$ tels que $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$.



Si f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ $(a < b)$ telles que, pour tout $x \in [a ; b]$: $g(x) \leqslant f(x)$.
L'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et de g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$,
c'est-à-dire l'ensemble des points M$(x ; y)$ vérifiant $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ g(x) \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$ est donnée en unités d'aires par $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$



$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a ; b]$.

On note aussi $\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b$

La fonction H définie par $H(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f s'annulant en a.

Propriétés

f et g sont des fonctions ayant des primitives sur les intervalles considérés.

$\int_a^a f(t)\,dt = 0$ $\qquad$ $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$ (Relation de Chasles)

$\int_a^b (f + g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$

Si $k \in$ IR $\int_a^b (kf)(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$

Si f est une fonction paire, alors $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$

Si f est une fonction impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$

Si f est une fonction périodique de période T, alors $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$

Si $a \leqslant b$ et si pour tout x de $[a ; b]$ on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

Si $a \leqslant b$ et si pour tout x de $[a ; b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

Valeur moyenne

On appelle valeur moyenne de f sur $[a ; b]$, le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Théorème de la moyenne

S'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de $[a ; b]$ $(a \leqslant b)$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$,

alors $m(b - a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b - a)$

Intégration par parties

On suppose que toutes les fonctions utilisées ont des primitives sur les intervalles considérés

$$\int_a^b u(t).v'(t)dt = \Big[u(t).v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)\,dt$$

Exemple

Pour calculer $\int_0^\pi t \sin t \, dt$, on pose $u(t) = t$ $v'(t) = \sin t$

$u'(t) = 1$ $v(t) = -\cos t$

Alors $\int_0^\pi t \sin t \, dt = \Big[(t)(-\cos t)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (1)(-\cos t)dt$

Donc $\int_0^\pi t \sin t \, dt = \Big[-t\cos t\Big]_0^\pi - \Big[-\sin t\Big]_0^\pi = \Big[-t\cos t + \sin t\Big]_0^\pi$

Donc $\int_0^\pi t \sin t \, dt = -\pi \cos \pi + \sin \pi - (-0 \cos 0 + \sin 0) = \pi$

Raisonnement par récurrence

Soit P(n) une proposition dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

Si P(n_0) est vraie (Initialisation)

et si pour tout entier $n \geqslant n_0$ P(n) $\Rightarrow$ P(n+1), (Hérédité)

alors P(n) est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple

On considère la somme S_n des cubes des n premiers entiers, c'est-à-dire $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Appelons P(n) la proposition : « $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ »

1ère étape : initialisation

On a $S_1 = 1^3 = 1$ et pour $n = 1$, $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \dfrac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$

La proposition P(1) est donc vraie

2ème étape : hérédité - passage de n à n+1

Supposons que la proposition P(n) est vraie pour un entier particulier $n \geqslant 1$, c'est-à-dire que $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Alors par définition $S_{n+1} = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = S_n + (n+1)^3$

Donc $S_{n+1} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\dfrac{n^2}{4} + (n+1)\right]$

$S_{n+1} = (n+1)^2\left[\dfrac{n^2+4n+4}{4}\right] = (n+1)^2\left[\dfrac{(n+2)^2}{4}\right]$

On a donc démontré que $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

c'est-à-dire que la proposition P(n+1) est vraie.

Conclusion

On a démontré que P(1) est vraie et que pour tout entier $n \geqslant 1$, P(n) $\Rightarrow$ P(n+1).
On en déduit donc que P(n) est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

On a démontré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Application : $S_{100} = 1^3 + 2^3 + \ldots + 100^3 = \dfrac{100^2 \times 101^2}{4} = 25\,502\,500$