Questions/Réponses du 17 avril au 1 mai

Q°1 J'ai regardé certains exercices qui nécessitaient des développements limités. Cependant, dans les corrections, l'ordre utilisé varie (entre 1 et 2). Comment savoir quel ordre appliquer à un développement limité?

R°1 Au voisinage de 0, avec un DL à l'ordre 0, vous justifiez la continuité d'une fonction car vous retrouvez $\lim_{x \to 0} f(x)$.
Avec un DL à l'ordre 1, vous justifiez la dérivabilité d'une fonction car vous retrouvez l'expression de la tangente (Au voisinage de 0, le coefficient devant x sera le nombre dérivé
$f'(0)$).
Avec un DL à l'ordre 2 ou plus, vous pouvez étudier localement la position de la courbe de f par rapport à sa tangente (on verra ça pendant la classe virtuelle du 6 mai).
Parfois on est contraint de faire un DL à un ordre plus grand que celui qui est attendu. C'est le cas dans la question 2 de l'exercice 1, puisqu'on peut simplifier par x au numérateur et au dénominateur, on commence donc à l'ordre 3 pour avoir finalement une réponse à l'ordre 2. C'est en essayant qu'on va se rendre compte s'il faut en faire plus.

Q°2 Dans le problème 1 question 3.b, nous ne comprenons pas les calculs de U1 et de U2

R°2 La base canonique de est formée des vecteurs $e_1 = (1,0,0)\,;\, e_2 = (0,1,0)\ et\ e_3 = (0,0,1)$. On a donc bien $u_2 = e_1 + e_3 = (1,0,1)$.
Par ailleurs, l'égalité $u_1 = (f - id)(e_1)$ s'écrit matriciellement N$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ (1ère colonne de la matrice N)

Q°3 Pourriez-vous également éclaircir la question 3.d du problème 1

R°3 D'après la question 3c et avec le théorème du rang on sait que dim(Ker($f - Id$))= 2.
Pour que (u_1,u_2) soit une base de Ker($f - Id$) il faut justifier que

- $u_1 \in$ Ker($f - Id$) c'est-à-dire ($f - Id$) (u_1)= 0 ce qui s'écrit matriciellement N$\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- $u_2 \in$ Ker($f - Id$) c'est-à-dire ($f - Id$) (u_2)= 0 ce qui s'écrit matriciellement N$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- et que la famille (u_1; u_2) est libre ce qui est évident car les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

Q°4 Nous ne comprenons pas la question 4.b avec la matrice T

R°4 Pour donner la matrice d'une application linéaire relativement à une base, on écrit en colonne les images des vecteurs de cette base (définition 10 du chapitre 10). La première colonne de la matrice T est donc le vecteur f(u1) décomposé dans la base (u1 ; u2 ; e1). Comme f(u1)= u1, la première conlonne de la matrice est (1 ;0 ;0). De même f(u2)= u2 donc la deuxième colonne de la matrice est (0 ;1 ;0). Enfin f(e1)= u1+e1 donc la troisième colonne de la matrice est (1 ;0 ;1).

Q°5 Nous ne comprenons pas la question 2.a du problème 2

R°5 Vous faites sûrement référence à la question 2a de la partie A du problème 2.

Puisque $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$, on a $v_{2n} = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_{2n}}{2n}$, donc $2v_{2n} = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_{2n}}{n}$. Puisque cette somme contient tous les termes de la suite u pour un indice qui varie de 1 à 2n, elle contient tous les termes de la suite u pour un indice qui varie de 1 à n et les termes de la suite u dont les indices varient de n+1 à 2n. Ainsi $2v_{2n} = v_n + \frac{u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n-1}+u_{2n}}{n}$;

Mais pour tout entier k>n , $u_k \geq u_n$ car la suite u est croissante. On a donc

$2v_{2n} \geq v_n + \frac{u_n+u_n+\cdots+u_n+u_n}{n}$ Dans cette somme il y 2n-(n+1)+1= n termes
On retrouve bien : $2v_{2n} \geq v_n + u_n$

Q°6 Dans la question 2.e de la partie C du problème 2, je ne comprends pas l'étape suivante : $(1-u_k)^2 = 2(u_{k+1}-u_k)$.

R°6 Cela vient de la définition par récurrence de la suite u : on sait que
$u_{k+1} = \frac{1+{u_k}^2}{2} \Leftrightarrow 2u_{k+1} = 1+{u_k}^2$
$ainsi\ (1-u_k)^2 = 1-2u_k+{u_k}^2 = 1+{u_k}^2-2u_k = 2u_{k+1}-2u_k$

On avait déjà trouvé cette relation dans la question 1b) lorsqu'on a calculé $u_{n+1}-u_n$.

Q°7 Dans l'exercice de type "I.E. 7" que vous avez-mis sur le site, pour la première question, quand il s'agit de justifier la convergence de la série, peut-on raisonner en partant du fait que la fonction cosinus est bornée?

R°7 On utilise effectivement le fait que la fonction cosinus est bornée par -1 et 1 et pour s'assurer que la suite (u_n) est positive. Mais cela ne suffit pas pour conclure sur la convergence de la série. En effet de nombreuses suites bornées donnent des séries divergentes (prenez la série de terme général $1+\frac{1}{n}$ par exemple). Il faut aller jusqu'à l'équivalent pour justifier qu'on a bien une série convergente (ou alors il faudrait qu'on soit en mesure de majorer u_n par le terme d'une série convergente, on peut exploiter 1-cos(x)$\leq \frac{x^2}{2}$).

Q°8 Dans le ds ; au problème 1, question 2.a) je ne comprends pas pourquoi on commence par n supérieur ou égal à deux (dans la correction)

R°8 Dans la binôme de Newton, la variable k prend les valeurs de 0 à n, et on sait que $N^k = 0$ si $k \geq 2$ alors on prend un nombre n≥ 2 pour exploiter cette propriété et arrêter la somme à k=1.

Q°9 dans le DS, exercice 2, question 5. est-ce qu'il est possible d'écrire la réponse sous la forme vect(0,0,1,3)?

R°9 Oui, dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, le polynôme $x^2 + 3x^3$ s'écrit bien (0,0,1,3). On a donc Ker(f)= Vect((0,0,1,3)) (il faut mettre des doubles parenthèses).

Q°10 dans le DS problème 2, partie B, en regardant la correction plusieurs fois j'ai l'impression de mieux comprendre mais cela reste assez incertain (questions 2. et 3.)

R°10 Il y a de nombreux détails et subtilités en effet, j'essaie de les lister ci-après.

2. Soit $n > N$, on a d'après l'inégalité triangulaire : $|v_n - l| \underset{1}{=} \left|\frac{u_1-l+u_2-l+\ldots+u_N-l+..+u_n-l}{n}\right| \underset{2}{\leq} \frac{|u_1-l|+|u_2-l|+\ldots+|u_N-l|+\ldots+|u_n-l|}{n} \underset{3}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - l|$
3. On sait que pour tout $k > N, |u_k - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$. En sommant ces inégalités pour k de $N+1$ à n on obtient : $\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - l| \underset{4}{\leq} \frac{n-N}{n}\frac{\epsilon}{2} \underset{5}{\leq} \frac{\epsilon}{2}$.

   Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - l| \underset{6}{=} 0$, il $\underset{7}{\text{existe}}$ un entier naturel non nul M tel que pour tout $n > M, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$

   Ainsi d'après les questions précédentes, on a bien l'existence d'un entier naturel non nul $N' = Max(N, M)$ tel que pour tout $n > N', |v_n - l| \leq \epsilon \quad {}_{8}$

1. On réduit au même dénominateur et on associe chaque u_k à « 1 » l:
2. On applique l'inégalité triangulaire à chaque somme du numérateur, comme n est un entier, il est égal à sa valeur absolue
3. On écrit les sommes avec le symbole $\sum$ …
4. Il y a n-N-1+1 termes dans la somme tous plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$
5. $\frac{n-N}{n} \leq 1$
6. La somme est finie et on divise par n qui tend vers +∞
7. Par définition d'une limite nulle.

8. Si n>N alors $\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - l|$ est plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$

   Et si n>M alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$

   En prenant n>max(N ;M), les deux inégalités sont vraies et en les sommant on a bien : $|v_n - l| \leq \epsilon$