Questions/Réponses du 3 avril au 9 avril

Q°1 Je me rends compte que j'ai très souvent des difficultés à calculer les limites. Je sais qu'il faut multiplier par la quantité conjuguée quand il y a une racine carrée, qu'il faut utiliser les équivalences et croissances comparées quand c'est possible. Mais quand faut-il factoriser par le plus grand nombre ? Quelles sont les autres méthodes que j'ai oubliées ?

R°1 Cf « Fiche méthode pour le calcul de la limite d'une suite » publiée sur le site le 3 avril

Q°2 Je ne comprends pas pourquoi la série dont le terme général est une suite $(u_n)$ strictement croissante de premier terme $u_0 > 0$ est divergente ?

R°2 Pour tout entier naturel n, on a $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \geq (n+1)u_0$ et $\lim_{n\to+\infty}(n+1)u_0 = +\infty$ car $u_0 > 0$. Ainsi par comparaison $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ donc la série diverge.

Remarque : en fait il y a divergence grossière car pour une suite $(u_n)$ strictement croissante on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \neq 0$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \geq u_0 > 0$

Q°3 Il y a quelque chose que je ne comprends pas sur la convergence des séries. Pourquoi, dans l'exemple 1 de la page 2, on dit que la série converge alors que la somme partielle tend vers 1 (du coup, en additionnant toutes les sommes partielles, nx1 tend vers l'infini...) tandis que dans le 3e point de la question 2 de l'exercice 15, la somme est aussi 1 et on dit qu'elle diverge !
Pouvez-vous donc faire un point rapide sur la convergence des suites ?

R°3

- Étudier une série de terme général $u_n$ c'est dire si la suite des sommes partielles $(S_n)$ est convergente ou divergente où pour tout entier n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
  Dans l'exemple du cours, $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$ alors on dit que la série converge vers 1. Cela force à avoir $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Lorsque $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ on dit que la série de terme général $u_n$diverge grossièrement. C'est ce qui se passe dans le 3ième point de la question 2 de l'exercice 15. Vous écrivez « la somme est aussi 1 » ce n'est pas ce qui est écrit dans le corrigé. Ce qui vaut 1 c'est la limite du terme général de la série: $\lim_{n\to+\infty} e^{u_n} = 1$
- Votre confusion vient aussi du fait que lorsqu'on étudie une série, il y a 2 suites. Celle qui est le terme général de la série $(u_n)$ et celle des sommes partielles $(S_n)$. On peut s'intéresser à la série de terme général $S_n$, (« en additionnant toutes les sommes partielles ») alors on a une double somme qui va diverger grossièrement dans l'exemple du cours puisque $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 \neq 0$.

CONCLUSION : lorsqu'on étudie la série de terme général $u_n$ on s'assure qu'elle ne diverge pas grossièrement (on vérifie donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$) puis on peut regarder les sommes partielles $S_n$ (elles peuvent être télescopiques ou faciles à calculer si ce sont des sommes usuelles). Sinon on se contente de comparer le terme général avec celui d'une série connue (cf bilan chap 12 publié sur le site le 1er avril)

Q°4 Je me demandais si c'était faux d'écrire des égalités avec des séries car dans les corrigés, les égalités sont toujours écrites avec des sommes de séries ou des sommes partielles.

R°4 Pensez bien qu'une série est une suite et que la limite de cette suite est une somme seulement si $\begin{cases}\text{cette limite est finie}\\ la\ série\ converge\end{cases}$ ainsi on n'écrira jamais

$$\sum_{n\geq 0} u_n = 1$$

(à gauche c'est la série donc une suite et elle n'est pas constante égale à 1…)

mais on pourra écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$$

Lorsque la série est divergente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\ n'existe\ pas$$

Q°5 Dans l'exercice 18 du TD 12, question 3, dans la correction, je ne comprends pas cette égalité, je ne comprends pas pourquoi dans la deuxième somme de la deuxième partie de l'égalité, on a $(-1)^{k+1}$ alors que l'on distribue $(-1)^k$. Pourquoi n'a-t-on pas $(-1)^k$ ?

R°5

$$\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}+\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

Effectivement on distribue $(-1)^k$ mais avec le – de la soustraction dans la deuxième somme on a bien:

$-(-1)^k = -1 \times (-1)^k = (-1)^{k+1}$

Q°6 Dans la question 5 de l'exercice 2 du TD 12, je ne comprends pas pourquoi ce que je fais ne correspond pas à la correction :
En utilisant cette formule,

$$\boxed{R_{p-1} = \sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}}$$

je trouverais :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{5^n} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^1}{1-\frac{3}{5}}$$

mais je ne trouve pas la bonne réponse.

R°6 La formule est juste mais pas son application puisque la raison est $\frac{1}{5}$ et pas $\frac{3}{5}$ (le 3 n'est pas à la puissance n, on peut le mettre en facteur). La somme est alors égale à
$3\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = 3\frac{1}{5}\frac{5}{4} = \frac{3}{4}$

Prérequis : On connaît les limites usuelles

1° S'il y a une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$ ou $-\infty + \infty$ ; on peut factoriser par le terme « le plus fort »
$Exemple$: $3^n - 2^n = 3^n(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n)$

2° S'il y a une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$, on peut utiliser les équivalents usuels (au voisinage de 0 ils découlent de la limite du taux d'accroissement) puis les croissances comparées
$Exemples$: au voisinage de $+\infty$, $\frac{e^n-1}{n^2+n} \sim \frac{e^n}{n^2}$ ; $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$

3° On peut utiliser les théorèmes de comparaison
$Exemple$: $n^2 + \cos(n) \geq n^2 - 1$

4° On peut utiliser le théorème d'encadrement (conséquence : le produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une suite bornée est une suite qui tend vers 0)
$Exemple$: $\frac{(-1)^n}{n}$

5° Avec des racines carrées on pense à multiplier et diviser par l'expression conjuguée pour lever l'indétermination
$Exemple$: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

6° Si la variable n est dans l'exposant, on pense à la forme exponentielle (cf exemple E3 p 8 du chap 11)
$Exemple$: $(\frac{n-1}{n+1})^n = (1 - \frac{2}{n+1})^n = e^{n\ln(1-\frac{2}{n+1})}$ or au voisinage de $+\infty$,
$n\ln(1 - \frac{2}{n+1}) \sim n(\frac{-2}{n+1}) \sim -2$ alors (th 9 chap 11) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{2}{n+1})} = e^{-2}$

7° Si la suite est récurrente alors on cherche un point fixe de la fonction qui définit la suite
$Exemple$: Si $u_{n+1} = {u_n}^2 - 2$ alors la potentielle limite $l$ doit vérifier
$l = l^2 - 2 \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Leftrightarrow l = -1 \; ou \; 2$ ensuite suivant les propriétés de la suite (variations, valeur de $u_0$ ...), on peut parfois décider de la valeur de la limite.