Questions/Réponses du 8 au 12 juin

Q°1 Je ne comprends pas la justification de la question 3 de l'exercice 13 dans le corrigé. En quoi la position des 0 permet-elle de dire que S et D ne sont pas indépendantes ?

R°1 Si S et D étaient indépendantes alors pour tout i $\epsilon\, S(\Omega)$ et pour tout j $\epsilon\, D(\Omega)$, on aurait : P(D = j ∩ S = i) = P(D=j)× P(S=i) donc au moins un des facteurs doit être nul.
Dans le tableau qui donne la loi du couple (S,D), on lit que
P(D = -1 ∩ S = 2)= 0 alors que P(D = -1) = 1/4 et P(S = 2) = ¼
Ceci permet d'affirmer que S et D ne sont pas indépendantes car
P(D = -1) ×P(S = 2)= 1/16 ≠ 0= P(D = -1 ∩ S = 2).

S \ D	-1	0	1	Loi de S
0	0	1/4	0	P(S= 0)=1/4
1	1/4	0	1/4	1/2
2	0	1/4	0	1/4
Loi de D	1/4	P(D=0)= 1/2	1/4	1

Q°2 Dans l'exercice 9, je ne comprends pas pourquoi P(X≥n+1) = 0.

R°2 Dans cet exercice, la variable aléatoire X prend ses valeurs entre 0 et n, elle ne peut pas être plus grande que n+1.

Q°3 Dans l'exercice 10, je ne comprends pas la démonstration concernant l'implication =>

R°3 Si les explications ne suffisent pas, nous pourrons reprendre l'exercice en classe virtuelle.

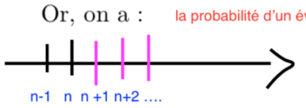
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que X admette une espérance, i.e. que $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ admet une limite finie lorsque $n \to +\infty$.
D'après l'égalité de la question 1, on a :

en transposant nP(X>n)

de limite finie en tant que somme partielle d'une série convergente par hypothèse

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) + n\mathbb{P}(X>n)} \qquad (*)$$

Or, on a : la probabilité d'un événement s'obtient en ajoutant les probabilités de tous les événements élémentaires qui le constitue



$$n\mathbb{P}(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=k)$$ n est une constante par rapport à la variable de sommation k

et comme $\forall k \geqslant n+1$, on a $0 \leqslant n\mathbb{P}(X=k) \leqslant k\mathbb{P}(X=k)$, et que toutes les séries sont convergentes, on a alors : >= n

en ajoutant terme à terme les inégalités précédentes

$$0 \leqslant n\mathbb{P}(X>n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \left(\mathbb{E}[X] - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k)\right)$$

c'est le reste d'ordre n d'une série convergente par hypothèse, il tend donc vers 0

Par encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X>n) = 0}$$

Finalement, d'après l'égalité $(*)$, les deux termes du membre de droite admettent bien une limite finie lorsque $n \to +\infty$, donc le membre de gauche de $(*)$ admet une limite finie aussi.
Ainsi, la série de terme général $\mathbb{P}(X>k)$ converge. car la suite des sommes partielles a une limite finie

Finalement, on a bien l'équivalence voulue, et si on est bien dans le cas où $\mathbb{E}[X]$ existe, alors par passage à la limite dans l'égalité $(*)$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k) = \mathbb{E}[X] + 0}$$

Q°4 Dans l'exercice 12, je ne comprends pas pourquoi le support vaut {0,1,2,3,4} et par conséquent je n'arrive pas à saisir d'où sortent les probabilités de la loi de S.

R°4 Ces tableaux devrait vous aider à comprendre (rappel : S=|X+Y| ; les variables X et Y sont indépendantes):

X\Y	-2	-1	0	1	2	3
1	S = 1 proba= 2/3*1/6 = 1/9	S= 0 1/9	S= 1 1/9	S= 2 1/9	S= 3 1/9	S= 4 1/9
-2	S= 4 1/18	S= 3 1/18	S= 2 1/18	S= 1 1/18	S= 0 1/18	S= 1 1/18

La loi du couple (X,S) est donnée ci-après :

X \ S	0	1	2	3	4	Loi de X
1	1/9	2/9	1/9	1/9	1/9	2/3
-2	1/18	2/18	1/18	1/18	1/18	1/3
Loi de S	1/6	1/3	1/6	1/6	1/6	1

Q°5 Ma question porte sur le 2) de l'exercice 16 du TD14 .

a) Je ne comprends pourquoi (B_n) est une suite croissante d'événements.

b) Pourquoi est-on obligé de calculer la probabilité de l'événement contraire $\lim_{n\to+\infty} 1-(\frac{1}{2})^n$ et pas $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n$?

R°5 a) Si l'événement B_n est réalisé : « sur les n premiers lancers on obtient au moins une fois un numéro pair. » alors l'événement B_{n+1} est réalisé : « sur les n+1 premiers lancers on obtient au moins une fois un numéro pair. » ainsi $B_n \subset B_{n+1}$ (c'est la définition 5 du chapitre 14). La suite (B_n) est donc croissante (c'est la définition 17 du chapitre 14).
b) En probabilité, lorsque l'énoncé contient « au moins 1 fois » , on considère toujours l'événement contraire qui est « zéro fois » car sa probabilité est très simple à calculer.

Q° 6

Je ne comprends pas les étapes de ce raisonnement (exercice 9, question 2) :

$$\mathrm{cov}(S,D) = \mathbb{E}[SD] - \mathbb{E}[S]\mathbb{E}[D] = (\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2]) - \mathbb{E}[S](\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]) = 0 - \mathbb{E}[S]0 = 0$$

Comment passe-t-on de la formule de la covariance au développement ? Pourquoi les différents éléments de celui-ci sont-ils nuls ?

R°6 Puisque S = X+Y et D = X-Y, on a SD= X^2-Y^2 donc par linéarité E(SD)= E(X^2) – E(Y^2). Les variables aléatoires X^2 et Y^2 suivent la même loi de Bernoulli de paramètre p donc leur espérance vaut p ainsi E(SD) = p – p = 0.
De même, X et Y suivent la loi de Bernoulli de paramètre p donc E(X) = E(Y) = p ainsi par linéarité E(D) = E(X)-E(Y) =p – p= 0.