Démonstration du théorème des suites adjacentes

Théorème

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite

Démonstration

Le principe

On montre que l'une des deux suites est plus grande que l'autre : on en déduit qu'on est en présence d'une suite croissante majorée et d'une autre décroissante minorée .

Pour se souvenir de cette démonstration

Penser à poser $w_n = u_n - v_n$ et chercher un encadrement du style $u_0 < u_n < v_n < v_0$.

Les pré requis

Une suite croissante majorée converge

Une suite décroissante minorée converge

La démonstration

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que (u_n) croissante , (v_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

- *On commence par montrer que $v_n > u_n$.*

On pose : $w_n = v_n - u_n$

Etudions le sens de variation de (w_n):

$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - v_n + u_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) < 0$ car $v_{n+1} - v_n < 0$ puisque (v_n) est décroissante et $u_{n+1} - u_n > 0$ puisque (u_n) croissante .

On en conclut que (w_n) est décroissante .

De plus , (w_n) converge vers 0 donc (w_n) est positive et $v_n > u_n$

- *On montre que les suites (u_n) et (v_n) convergent :*

$u_n < v_n < v_0$ car la suite (v_n) est décroissante

donc (u_n) est croissante majorée par v_0 donc converge .

De même , $u_0 < u_n < v_n$ car (u_n) croissante donc (v_n) est décroissante minorée et convergente

- *Montrons qu'elles ont même limite :*

On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ donc L – L' = 0 et L = L' .