p16

Proposition 30 PREUVE

En supposant que deux décompositions existent alors on peut écrire

$$0 = x - x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j - \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \mu_j) u_j$$

on a écrit une combinaison linéaire nulle des $(u_1, \dots, u_k)$

Par liberté, elle est triviale donc $\forall\ 1 \leq j \leq k$

$$\lambda_j - \mu_j = 0 \quad \text{CQFD}$$

p17

Proposition 31 PREUVE

1er point : Procédons par équivalence :

Supposons que $(u_1, \dots, u_k, x)$ est liée

$\Longleftrightarrow \exists\ (\lambda_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ des réels "non tous nuls" *

tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \lambda_{k+1} x = 0$

Si $\lambda_{k+1} = 0$ alors $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0$ est une combinaison linéaire nulle des $(u_1, \dots, u_k)$.

Par liberté, elle est triviale ABSURDE, CONTRADICTION avec *

Donc $\lambda_{k+1} \neq 0$ et $x = \frac{-1}{\lambda_{k+1}} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$

2e point : C'est la proposition contraposée de la précédente.