Preuves du 05/06

Théorème 30

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On sait que $V(X+\lambda Y) \geq 0$

or $V(X+\lambda Y)$ est l'espérance de $(X+\lambda Y - E(X+\lambda Y))^2$

$$= (X + \lambda Y - E(X) - \lambda E(Y))^2$$

$$= (X - E(X) + \lambda(Y - E(Y)))^2$$

$$= (X - E(X))^2 + 2(X-E(X))\lambda(Y-E(Y)) + \lambda^2 (Y-E(Y))^2$$

Ainsi par linéarité de l'espérance on a :

$$V(X+\lambda Y) = V(X) + 2\lambda \, \mathrm{Cov}(X,Y) + \lambda^2 V(Y)$$

Ce trinôme en λ étant positif ou nul son discriminant est négatif ou nul ainsi

$$4 \, \mathrm{Cov}(X,Y)^2 - 4 V(X) V(Y) \leq 0$$

CQFD