## Proposition 23

On cherche à calculer l'espérance de

$$(X+Y-E(X+Y))^2 = (X+Y-E(X)-E(Y))^2$$

linéarité de l'espérance

$$= (X-E(X)+Y-E(Y))^2$$

identité remarquable

$$= (X-E(X))^2 + 2(X-E(X))(Y-E(Y)) + (Y-E(Y))^2$$

or $(X-E(X))(Y-E(Y)) = XY - E(X)Y - XE(Y) + E(X)E(Y)$

on développe

En prenant l'espérance, par linéarité on trouve :

$$\underbrace{E(XY) - E(X)E(Y)}_{0 \text{ par indépendance (proposition 16)}} - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = 0$$

Finalement on a bien $V(X+Y) = E((X-E(X))^2) + E((Y-E(Y))^2)$

$$= V(X) + V(Y)$$

## Théorème 24

Soit $a > 0$ et $X$ une vad positive

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k < a}} k\, P(X=k) + \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq a}} k\, P(X=k)$$

$$\geq 0 + \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq a}} a\, P(X=k)$$

$$= a\, P(X \geq a)$$ CQFD.

## Théorème 25

Découle du th. 24 en considérant la vad positive $(X-E(X))^2$.