Preuves du 03/06

Théorème 21

- Montrons, sous réserve d'existence, l'égalité $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

On sait d'après la définition 20 que

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2 \right)$$

on développe $\rightarrow$ $$= E\left(\underbrace{X^2}_{Y} - 2XE(X) + \underbrace{E(X)^2}_{b} \right)$$

par linéarité $\rightarrow$ (2ème forme, corollaire 15 et 1ère forme, corollaire 12) $$= E(X^2) \overbrace{- 2E(X)}^{a}E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- D'après ce qui précède et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

X admet un moment d'ordre 2 $\Leftrightarrow$ $E(X^2)$ et $E(X)$ existe

$\Leftrightarrow$ $V(X)$ existe

Proposition 22

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche à calculer l'espérance de

$$(aX + b - E(aX+b))^2 \underset{\uparrow}{=} (aX \cancel{+b} - aE(X) \cancel{-b})^2 = a^2 (X - E(X))^2$$

linéarité de l'espérance

On retrouve bien $a^2 V(X)$ par linéarité de l'espérance.