Chapitre 12

Proposition 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$.

On a $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} S - S = 0$

Th. 8

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k$

Ainsi la suite des sommes partielles pour la série de terme général u_n est majorée donc elle converge d'après la proposition 6.

- Contraposée du point précédent.

Th. 9

On suppose que $\begin{cases} u_n = \alpha_n v_n \\ \alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{cases}$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \quad \alpha_n \leq 1$. A partir du rang N on a $0 \leq u_n \leq v_n$ alors on applique le Th. 8 à la série $\sum_{n \geq N} u_n$ qui est de même nature que $\sum_{n \geq 0} u_n$ (proposition 4).

Th. 10

- On suppose que $\begin{cases} u_n = v_n(1+\alpha_n) \\ \alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{cases}$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \quad \alpha_n \leq 1$. A partir du rang N on a $0 \leq u_n \leq 2v_n$.

On applique alors le Th 8 à la série $\sum_{n \geq N} u_n$ et $\sum_{n \geq N} 2v_n$.

- Par symétrie des rôles joués par u_n et v_n dans la relation d'équivalence on a aussi $\begin{cases} v_n = (1+\beta_n) u_n \\ \beta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{cases}$

donc si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge.