Théorème 13

$\Rightarrow$ Le sens direct découle de la proposition 12, admise.

$\Leftarrow$ • $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = \ell \in \mathbb{R}$ donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

Ce qu'on sait

$\forall n \geq N_1 \quad |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$.

• $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell \in \mathbb{R}$ donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \geq N_2 \quad |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$.

Ce qu'il faut démontrer : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall k \geq N \quad |u_k - \ell| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ en posant $N = \max(N_1, N_2)$ on a pour $k \geq 2N+1$:

- si k est pair comme $N \geq N_1$ on a $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$ $(k = 2n)$
- si k est impair comme $N \geq N_2$ on a aussi $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$. $(k = 2n+1)$

CQFD

Conséquence 19

Soit (u_n) une suite bornée, il existe donc $M > 0$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M$.

Soit (v_n) une suite qui converge vers 0.

Montrons que $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Pour cela on considère $\varepsilon > 0$.

$\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \quad |v_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$

par définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

alors $|u_n v_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{M} |u_n| \leq \varepsilon$ CQFD