Preuves du 15 mai

p 6 **Propositions 10**

1. Par σ-additivité lorsque $\text{Card}(I) = 2$.
2. Car $A \cup \bar{A} = \Omega$ et par σ-additivité et parce que $P(\Omega) = 1$ par définition.
3. Découle de 2. puisque $\bar{\emptyset} = \Omega$.
4. $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ cette réunion étant disjointe

On a $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

$$\Leftrightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

5. Découle de 4. puisque $A \cap B = B$ lorsque $B \subset A$.
6. Si $A \subset B$ alors $B = (A) \cup (B \setminus A)$ cette réunion est disjointe

donc $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \leq P(A)$

car $P(B \setminus A) \geq 0$

7. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ cette réunion étant disjointe

il vient $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$

$$\overset{4.}{\rightarrow} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\leq P(A) + P(B)$$

car $P(A \cap B) \geq 0$.

Théorème 11

On sait que $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$ ainsi $A = A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i)$

$$= \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

Cette union étant disjointe on a par σ-additivité

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i)$$