Preuves du 15 juin

Proposition 13

Si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$ alors

- $$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$$
serie exponentielle $\rightarrow$ $$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

- $$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2$$
$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (k(k-1)+k) \frac{\lambda^k}{k!} \right) - \lambda^2$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} - \lambda^2$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} - \lambda^2$$
$$= \lambda.$$