Preuves du 10 juin

Proposition 2.

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ alors $E(X) = p \times 1 + (1-p) \times 0$
$= p$

et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
$= p \times 1^2 + (1-p)0^2 - p^2$
$= p - p^2 = p(1-p)$

Proposition 3.

$\Longrightarrow$ Evident par définition de 2 variables aléatoires indépendantes

$\Longleftarrow$ On sait depuis le chapitre 14 que si A et B sont indépendants alors ① $\overline{A}$ et B aussi
② $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi
③ A et $\overline{B}$ aussi

Il faut s'assurer que $\forall (i,j) \in \{0;1\}^2$
$$P(X_1 = i \cap X_2 = j) = P(X_1 = i) \times P(X_2 = j)$$
On sait par hypothèse que cette égalité est vraie pour $i = j = 1$.
Alors d'après ce qui précède elle est vraie pour ① $i = 0$ et $j = 1$
② $i = 0$ et $j = 0$
③ $i = 1$ et $j = 0$

CQFD.

Proposition 5 cf TD14 Ex 16 ou Exemple p10 chap 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $A_n =$ "on obtient aucun succès au cours des n premières épreuves de Bernoulli"

Alors $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n =$ " on obtient aucun succès" . La suite (A_n) est décroissante.

et $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \underset{\text{th. de la limite monotone}}{=} \lim_{N \to +\infty} P(A_N) \underset{\text{par indépendance}}{=} \lim_{N \to +\infty} (1-p)^N \underset{1-p \in]0;1[}{=} 0$

Ainsi l'événement contraire "on obtient au moins un succès" est presque-sûr.