

Preuves du 29/01Prop 28 p. 13

Soit $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire

Alors $f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ d'une part

d'autre part $f(0+0) = f(0)$

Ainsi $f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Prop 29 p. 13

• Soit G un sev de \mathbb{R}^p

alors ① $f(G) = \{ f(x), x \in G \} \subset \mathbb{R}^n$

② $0 \in f(G)$ d'après la prop 28 donc $f(G) \neq \emptyset$

et ③ pour $u, v \in f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ montrons que $\lambda u + v \in f(G)$.

$\exists y, x \in \mathbb{R}^p$ tels que $u = f(x)$ et $v = f(y)$ alors

$$\lambda u + v = \lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y) \in f(G)$$

car f est linéaire et G est un sev donc $\lambda x + y \in G$.

• Soit H un sev de \mathbb{R}^n

alors ① $f^{-1}(H) = \{ x \in \mathbb{R}^p / f(x) \in H \} \subset \mathbb{R}^p$

② $0 \in f^{-1}(H)$ car $0 \in H$ et $f(0) = 0$ d'après la prop 28

③ soient $x, y \in f^{-1}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ montrons que $\lambda x + y \in f^{-1}(H)$

on sait que $f(x) \in H$ et $f(y) \in H$ et H sev de \mathbb{R}^n donc

$$\lambda f(x) + f(y) \in H \quad \text{or} \quad \lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y) \quad \text{par linéarité}$$

donc $\lambda x + y \in f^{-1}(H)$.