p2

Th 15 p 7

Cela revient à montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices anti-symétriques sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de $M_n(\mathbb{R})$.

- Montrons que la matrice nulle est la seule à être à la fois symétrique et anti-symétrique :

Soit $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ alors $A^T = A$ et $A^T = -A$

donc $A = -A \Leftrightarrow A = 0$ $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont en somme directe

- On a clairement $\mathcal{S} + \mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{R})$ par définition.
- Réciproquement soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Analyse

Si $\exists U \in \mathcal{S}$ et $V \in \mathcal{A}$ telles que $M = U + V$

alors $M^T = (U+V)^T = U^T + V^T = U - V$

donc $U = \dfrac{M+M^T}{2}$ et $V = \dfrac{M-M^T}{2}$

Synthèse

$$U^T = \frac{M^T + M^{TT}}{2} = \frac{M^T + M}{2} = U \in \mathcal{S}$$

et $$V^T = \frac{M^T - M^{TT}}{2} = \frac{M^T - M}{2} = -V \in \mathcal{A}.$$

Conclusion

M s'écrit $\dfrac{M+M^T}{2} + \dfrac{M-M^T}{2} \in \mathcal{S} + \mathcal{A}$

et on a bien $M_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S} + \mathcal{A}$.