Théorème 8

Ce qu'on doit démontrer: $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N \quad |f(u_n) - a| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. • $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ donc $\exists \alpha > 0$

$\forall x \in I \quad |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - a| \leqslant \varepsilon$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$

$\forall n \geqslant N \quad |u_n - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(u_n) - a| \leqslant \varepsilon$

CQFD

Théorème 9

Comme f est $\mathcal{C}^0$ en ℓ on a $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$

donc le Th. 8 permet de conclure.

Proposition 10

La fonction valeur absolue est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ donc l'implication directe découle du Th. 9. L'implication réciproque (lorsque $\ell = 0$) vient de la définition 4.