Proposition 5

On suppose par l'absurde qu'il existe $\ell_1 \neq \ell_2$ des réels tels que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_2$. Soit $\varepsilon > 0$

Alors $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1 \quad |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$

et $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2 \quad |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$ alors $\forall n \geq N$

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2|$$

inégalité triangulaire

$$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Ainsi l'écart entre ℓ_1 et ℓ_2 est aussi petit qu'on veut

CONTRADICTION avec $\ell_1 \neq \ell_2$ (en prenant $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{4}$

on obtient $\frac{|\ell_1 - \ell_2|}{4} \times 2 \geq |\ell_1 - \ell_2|$ ABSURDE)

Proposition 7

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ montrons que (u_n) est bornée.

$\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \quad |u_n - \ell| \leq 1$

c'est-à-dire $\forall n \geq N, \; -1 \leq u_n - \ell \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 + \ell \leq u_n \leq 1 + \ell$$

Notons $m = \min_{[\![0;N-1]\!]} u_n$ et $M = \max_{[\![0;N-1]\!]} u_n$ *

alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad \min(m, -1+\ell) \leq u_n \leq \max(M, 1+\ell)$

* m et M existent car il y a un nombre fini de valeurs