Chap 12

Théorème 16 (p8)

Raisonnons par disjonction de cas :

Si $\alpha \leqslant 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ donc la série diverge grossièrement.

Si $\alpha = 1$ on retrouve la série harmonique et on a démontré par comparaison à une intégrale que la série est divergente (Exemple E2 p2)

Si $\alpha \in]0;1[$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n} > 0$

et comme la série harmonique diverge on sait d'après le Th. 8 que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge également.

Si $\alpha > 1$ soit $k \geqslant 2$. la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$

Pour montrer que la série converge on cherche à majorer les sommes partielles

est décroissante sur $[k-1;k]$ donc $\forall t \in [k-1;k]$

on a $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$

en intégrant il vient $\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$

Soit $N \geqslant 2$.

En sommant pour k variant de 2 à N on a :

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^N \frac{1}{t^\alpha}\,dt \quad \text{(Relation de Chasles)}$$

$$= \left[\frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_1^N$$

$$= \underbrace{\frac{-1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \text{ donc bornée (majorée par 0)}} + \frac{1}{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$$

Conclusion :

D'après la proposition 6 $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ aussi (proposition 4)