Pour les séries dérivées, commençons par constater qu'elles ne peuvent pas converger si $|q| \geqslant 1$ puisque le terme général ne tend pas vers 0. Dans le cas contraire, posons $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. La somme partielle de la série géométrique classique n'est autre que $f(q)$, mais les séries géométriques dérivées peuvent également s'exprimer simplement en fonction de f, ou plutôt de ses dérivées (d'où le nom !) : $f'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1}$, donc $f'(q)$ représente la somme partielle de la série géométrique dérivée de raison q. De même, $f''(q)$ n'est autre que la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde de raison q. Or on sait par ailleurs que $f(q) = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, donc (via un sympathique calcul de dérivée de quotient) $f'(q) = \dfrac{-(n+1)q^n + (1-q^{n+1})}{(1-q)^2} = \dfrac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}$ et

$$f''(q) = \frac{n(n+1)q^n(1-q)^2 - n(n+1)q^{n-1}(1-q)^2 + 2(1-q)(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)}{(1-q)^4}$$

$$= \frac{-n(n-1)q^{n+1} + 2(n^2-1)q^n - n(n+1)q^{n-1} + 2}{(1-q)^3}.$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$, en utilisant le fait que $\lim_{n\to+\infty} nq^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2q^n = 0$ (par croissance comparée) pour obtenir la convergence des sommes partielles vers les valeurs indiquées. $\square$