Théorème 24
Pour tout $n \geq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Preuve On note pour tout entier naturel n, P(n) : " $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ".

- Vérifions que P(0) est vraie :
  D'une part, on a : $\sum\limits_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$ et d'autre part, $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$.
  La propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- Soit n un entier naturel.
  On suppose que la propriété P(n) est vraie c'est-à-dire $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
  Montrons que la propriété P$(n+1)$ est vraie. On doit montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.
  On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

- Par récurrence, la propriété P(n) est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 0.