Théorème 14 :

Pour alléger les notations, on note S à la place de S_n et p à la place de p_n.

Soit S une variable aléatoire discrète suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.

On se place dans le cas où $n \to +\infty$, et le produit np tend vers a

On a alors, pour $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} P(S=k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\, p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

soit, en posant $np = a \iff p = \dfrac{a}{n}$,

$$\begin{aligned} P(S=k) &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\, p^k \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n^k \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{(np)^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Lorsque $n \to +\infty$, tous les facteurs $\left(1-\dfrac{i}{n}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, tendent vers 1, et donc,

$$P(X=k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(np)^k}{k!}\, p^k (1-p)^{n-k}$$

De plus,

$$(1-p)^{n-k} = \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} = \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}$$

avec, pour k un entier fixé,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} = 1$$

Pour le premier facteur , on rappelle que :

Proposition: *Soit $a \in \mathbb{R}$, alors,*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n} = e^{-a}$$

Démonstration: On écrit $\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)}$.

Lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{a}{n} \to 0$, et alors on a $\ln\left(1-\dfrac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{n}$.

Ainsi,

$$\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n\left(-\frac{a}{n}\right)} = e^{-a}$$

□

On aboutit alors à :

$$(1-p)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-a}$$

ce qui nous permet d'affirmer que :

$$P(.S=k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(np)^k}{k!} e^{-a} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

qui est la probabilité de l'événement "$\mathbf{S}' = k$" lorsque la variable aléatoire $\mathbf{S}'$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$ de paramètre $a = np$.

En pratique, on applique cette approximation dès que $n \geqslant 50$ et $p < 0,1$, ou encore dès que $n > 30$ et $np < 5$.