Proposition 7

Soit $T \sim \mathcal{G}(p)$ et $k \geq 1$.

- $P(T > k) = P(X_1 = X_2 = \dots = X_k = 0)$

$= P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0) \times \dots \times P(X_k = 0)$ par indépendance

$= (1-p)^k$

- Pour $j \geq 1$ on a $P_{T>j}(T > k+j) = \dfrac{P(T > j \cap T > k+j)}{P(T > j)}$

"$T > k+j$" $\subset$ "$T > j$" $\longrightarrow$ $= \dfrac{P(T > k+j)}{P(T > j)}$

d'après le calcul précédent $\longrightarrow$ $= \dfrac{(1-p)^{k+j}}{(1-p)^j}$

$= (1-p)^k$

$= P(T > k)$ (loi sans mémoire)

Proposition 8

<u>Méthode 1</u> On sait d'après l'exercice 10 du TD15 que

$$E(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T > k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Série géométrique

<u>Méthode 2</u> Par définition $E(T) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\, p\,(1-p)^{k-1}$

$$= p \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1}$$

série géométrique dérivée première $\longrightarrow$ $= p \dfrac{1}{(1-(1-p))^2} = \dfrac{p}{p^2} = \dfrac{1}{p}$