

Proposition 7

Soit $T \sim \mathcal{G}(p)$ et $k \geq 1$.

$$\begin{aligned}
 \bullet P(T > k) &= P(X_1 = X_2 = \dots = X_k = 0) \\
 &= P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0) \times \dots \times P(X_k = 0) \quad \text{par indépendance} \\
 &= (1-p)^k
 \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Pour } j \geq 1 \text{ on a } P(T > k+j) = \frac{P(T > j \cap T > k+j)}{P(T > j)}$$

$$"T > k+j" \subset "T > j" \rightarrow = \frac{P(T > k+j)}{P(T > j)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'après le calcul précédent} \rightarrow &= \frac{(1-p)^{k+j}}{(1-p)^j} \\
 &= (1-p)^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1-p)^k \\
 &= P(T > k) \quad (\text{loi sans mémoire})
 \end{aligned}$$

Proposition 8

Méthode 1 On sait d'après l'exercice 10 du TD15 que

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(T > k) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}
 \end{aligned}$$

Série géométrique

$$\begin{aligned}
 \text{Méthode 2} \quad \text{Par définition} \quad E(T) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k p (1-p)^{k-1} \\
 &= p \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{série géométrique} &\rightarrow = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \\
 \text{dérivée première} &
 \end{aligned}$$