Preuve du 27/01

Prop 20 p.

Méthode 1

$\boxed{\Rightarrow}$ On montre la contraposée : si $ad-bc=0$ alors les lignes de la matrice A sont proportionnelles donc le système associé n'est pas de Cramer et la matrice A n'est pas inversible.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $ad-bc \neq 0$ raisonnons par disjonction de cas

Si $a=0$ alors A est triangulaire et b et c sont non nuls donc A est inversible.

Si $a \neq 0$ on applique la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow aL_2 - cL_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow (ad-bc)L_1 - bL_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} a(ad-bc) & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} ad & -ab \\ -c & a \end{pmatrix}$$

En divisant L_1 par $a(ad-bc)$ et L_2 par $ad-bc$ on trouve bien

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Méthode 2 $\boxed{\Rightarrow}$ cf Méthode 1

$\boxed{\Leftarrow}$ Vérifiez que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$

Méthode 3 $\boxed{\Rightarrow}$ cf Méthode 1

$\boxed{\Leftarrow}$ Calculez "AA^{-1}" et retrouver I