Préparation du CB1 : Corrigé

Exercice 1 :

0. Avec la formule d'addition du cosinus on a pour tout réel θ : $\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$
1. (a) Pour tout réel x, $\cos(x)$ est borné et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{u \to -\infty} e^{u} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

   (b) Les courbes de f *et* g ont pour asymptote commune l'axe des abscisses d'équation y = 0.

2. $g(x) - f(x) = e^{-x} - e^{-x}\cos(x) = (1 - \cos(x))e^{-x}$

   Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et $\cos(x) \leqslant 1$ donc $(1 - \cos(x)) \geqslant 0$; donc, pour tout x, $g(x) - f(x) \geqslant 0$ et donc la courbe $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3. **a.** On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

   Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0 ; +\infty[$ donc la fonction h est dérivable sur $[0 ; +\infty[$:

   $h'(x) = g'(x) - f'(x) = -e^{-x} - (-e^{-x}\cos(x) + e^{-x}(-\sin(x))) = e^{-x}(-1 + \cos(x) + \sin(x))$

   On a vu dans la partie A que, pour tout réel θ, $\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$, donc

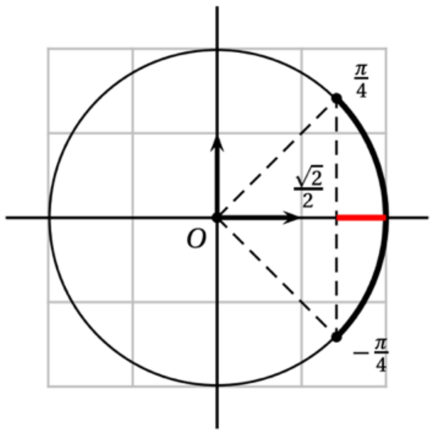
   $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x)$.

   On peut donc en déduire que $h'(x) = e^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.

   b.

   - On se place dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

   $$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$
   $$\iff -\frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}$$
   $$\implies \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$
   $$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$$
   $$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$$



- On se place dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

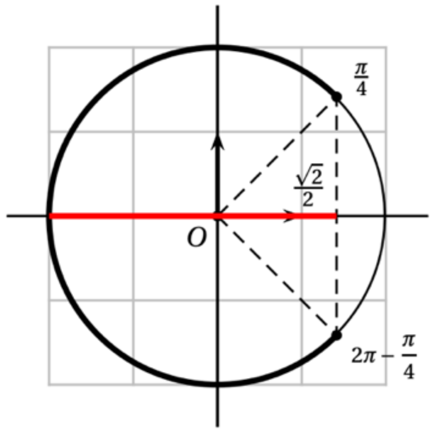
$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$

$\iff \frac{\pi}{4} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{4}$

$\implies \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$

$\iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$



c. $h(x) = g(x) - f(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - \cos(x))$
$h(0) = \mathrm{e}^{0}(1 - \cos(0)) = 1(1-1) = 0$
$h(2\pi) = \mathrm{e}^{-2\pi}(1 - \cos(2\pi)) = \mathrm{e}^{-2\pi}(1-1) = 0$
$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}(1-0) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}21$
On en déduit le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.

d.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
e^{-x}		$+$	|	$+$	
$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$	0

L'écart entre $f(x)$ et $g(x)$ est donné par $|g(x) - f(x)| = |h(x)| = h(x)$.
Il est maximal pour $x = \frac{\pi}{2}$ (en effet pour tout entier naturel k, la fonction h admet un maximum relatif sur $[2k\pi; 2(k+1)\pi]$ pour $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ mais ce maximum vaut $e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$; il est donc d'autant plus petit que k est grand).