Limites des suites usuelles

Proposition

- Une suite arithmétique de raison $r > 0$ diverge vers $+\infty$
- ________________________________ $r < 0$ diverge vers $-\infty$
- ________________________________ $r = 0$ converge vers son 1er terme

Preuve

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$

Propositions

1) Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
2) Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 1^n = 1$
3) Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
4) Si $q \leq -1$ alors (q^n) n'a pas de limite.

Preuves

3) On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall a > 0$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+a)^n \geq 1 + na$
On a alors justifier le 3) dans le cas où $q > 1$
par comparaison car $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ (puisque $a > 0$)

1) Si $q \in]0;1[$ en considérant $Q = \dfrac{1}{q}$ on a $Q > 1$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} Q^n = +\infty$ et par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
Si $q = 0$ on a évidemment $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
Si $q \in]-1;0[$ alors $|q| \in]0;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |q|^n = 0$
or $|q|^n = |q^n|$ et la proposition 10 assure $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

2) évident car la suite est constante égale à 1.

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{2n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{2n+1} = -\infty$ par opérations
donc la suite (q^n) n'a pas de limite (Th. 13)